



ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Проф. И. В. Арнольд

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ
ЧИСЛА
В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

МОСКВА · 1947 · ЛЕНИНГРАД

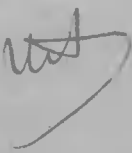
АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

проф. И. В. АРНОЛЬД
Член ко респондент АГН РСФСР

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

не читать
этой книги.
от автора
М. Я. Канкович
4/5/77. 

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1947 Ленинград



О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка		Напечатано	Должно быть
	св.	сн.		
12		7	нуля	нуля и
57	14		$+2, 0, -2$	$+3, 0, -3,$
69		16	$(2b+5)$	$(2b-5)$
69		20	$x^2-5x+6=0$	$x^2+5x+6=0$
73	21		x^3	x^2

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

*(Методическое пособие для учителей и студентов
педагогических институтов)*

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Введение отрицательных чисел в самом начале курса алгебры связано с целым рядом методических затруднений, и это вполне естественно. При всяком обобщении и расширении понятий в математике приходится введенные ранее термины и способы выражения употреблять в новом смысле, нарушая установившиеся привычные представления учащихся. Так, приходится говорить о числах, которые меньше нуля, между тем как учащиеся привыкли к тому, что меньше нуля «ничего быть не может»; сумма может оказаться меньше обоих слагаемых; при умножении возникают новые правила («минус на минус дает плюс»), которые учащемуся трудно связать с привычными представлениями, относящимися к действию умножения натуральных чисел.

Все эти обстоятельства не случайны, а полностью повторяют те недоумения и сомнения, которые и исторически сопровождали процесс освоения новой категории чисел. Погребовалось несколько столетий для того, чтобы в эти вопросы внести ясность и включить новые объекты — отрицательные числа — в качестве равноправных членов в семью чисел. В преподавании мы не можем, конечно, идти по тому извилистому пути, которому при этом следовало человечество, и вынуждены добиваться того, чтобы учащиеся быстро овладевали математическим аппаратом в той его форме, в какой он в конечном итоге применяется сейчас. Но это должно заставить нас отнестись с тем большим вниманием к психологии учащихся и принять все зависящие от нас меры к устранению тех естественных недоумений и сомнений, о которых идет речь. Можно утверждать, что именно на это направляются в основном усилия всех составителей учебников по алгебре и препо-

давателей, желающих облегчить учащимся усвоение этого раздела курса. Обилие и разнообразие относящихся сюда способов изложения и методических приемов, предлагаемых различными авторами, свидетельствуют о неизменной актуальности вопроса и о том, что удовлетворительное его разрешение еще не достигнуто.

Мы думаем, что и по существу здесь возможны различные способы изложения и разные подходы к делу— в конечном итоге решающей является привычка обращаться с новыми понятиями, приобретаемая учащимися в процессе их применения. Вычислительной практикой закрепляются установленные определения и формальные правила действий: при применении к различного рода величинам в процессе решения задач выясняется и закрепляется конкретный смысл и осознается практическая полезность новых понятий. Из этих положений, имеющих весьма общее значение в преподавании математики, вытекает, прежде всего, первостепенное значение упражнений и задач при прохождении любой математической дисциплины, в соответствии с классическим указанием Ньютона: «Примеры учат не меньше, чем правила». Этим объясняется и то, что при самых разнообразных подходах к вопросу и различных способах построения теории, иногда даже и дефектных с той или иной точки зрения, в конечном итоге, после достаточного числа упражнений, достигается, в среднем, требуемый результат. С какого конца ни начинать, но действовать-то приходится всем одинаково: в процессе активной деятельности учащихся отдельные дефекты большей частью сглаживаются, и выкристаллизовывается именно то, что нужно.

Это обстоятельство, однако, не снимает основного вопроса о психологических затруднениях учащихся при освоении новых понятий.

Начальные объяснения и определения, подбор и распределение соответствующих иллюстрирующих примеров и упражнений—все это в практике преподавания определяет как степень трудности для учащихся в усвоении того или иного раздела курса, так и качество этого усвоения—ту или иную степень одного из распространенных недостатков нашей школы—«формализма» в овладении новым материалом, быстроту и уверенность ориентировки учеников в вопросах, требующих отчетливых представлений о связи абстрактного с конкретным и т. д.

Для того чтобы выбрать здесь правильный путь, помочь учащимся быстрее преодолеть естественно возникающие затруднения, преподаватель должен с возможно большей отчетливостью и полнотой ориентироваться как в теоретической стороне дела, так и в тех методических приемах, которые могут найти применение в нужных случаях. Настоящая брошюра и имеет целью помочь в этом преподавателю.

§ 2. ВВЕДЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

В законченной форме систематический курс геометрии представляет собой, как известно, цепь логически-связанных друг с другом предложений, причем последующие теоремы и определения опираются на ранее установленные определения, аксиомы и теоремы. Такой способ изложения отвечает самой сущности математического метода, характерной особенностью которого как раз и является вывод одних положений из других с помощью логического рассуждения (дедукция). В такую форму облакаются все математические дисциплины, в разработке которых достигнута соответствующая степень законченности. В частности, так оформляется в современной математике и тот материал, который отвечает школьным курсам арифметики и алгебры. В школьном изложении этих учебных предметов эта сторона дела отражена гораздо менее отчетливо, чем в курсе геометрии, и часто совсем ускользает от внимания учащихся, воспринимающих арифметику на основе непосредственных конкретных представлений о числах и действиях над ними, а алгебру—как совокупность некоторого числа технических правил буквенного исчисления. В отношении арифметики такая установка неизбежна и естественна, хотя и здесь можно высказать уверенность в целесообразности увеличения удельного веса логического рассуждения при прохождении курса, с одной стороны, и в необходимости, с другой стороны, большего внимания к действительно конкретному и осязательному пониманию учащимися числовых соотношений (в особенности при изучении дробей). Не останавливаясь сейчас на этом, отметим только, что часто встречающаяся (даже у оканчивающих среднюю школу) неуверенность в обращении с нулем и единицей

свидетельствует о довольно серьезном неблагополучии в указанных отношениях уже в курсе арифметики.

Однако при переходе к алгебре, в частности, в интересующем нас вопросе об отрицательных числах, неясности в отношении методологической структуры предмета способны привести—при неудачном методическом подходе—к своего рода кризису. Привыкнув в арифметике воспринимать законы действий над целыми числами как нечто конкретно-осязательное и придавая второстепенное значение соответствующим определениям, учащиеся теряются при изучении отрицательных чисел, для которых конкретное истолкование действий уже не носит столь непосредственного характера. Приобретающие в связи с этим значительно большее значение определения воспринимаются учащимися как нечто чужеродное, их «условность» кажется необидительной, ученики ищут и требуют чего-то другого, чего обычное изложение в учебнике им не в состоянии дать. В поисках большей убедительности более активные методисты и преподаватели стремятся отойти от обычного изложения, иногда подменяя стандартные определения неполноценными с теоретической точки зрения формулировками, а иногда даже прибегая к суррогату доказательств там, где о доказательствах по существу не может быть и речи.

Прежде, чем обращаться к методике вопроса необходимо поэтому отдать себе достаточно ясный отчет в том, как же здесь обстоит дело по существу, с точки зрения требований безупречного с логической стороны дедуктивного построения этого раздела курса. После этого можно будет вернуться к вопросу о том, чего же именно не хватает учащимся и в какой форме можно пойти навстречу их запросам, вполне закономерным с психологической точки зрения.

Подчеркиваем еще раз, что дальнейшее изложение в этом параграфе отнюдь не должно рассматриваться, как возможный вариант школьного изложения предмета. Имея в виду охарактеризованные выше цели, мы остановимся на теоретической стороне вопроса, адресуясь к читателю, у которого уже есть основания специально ею интересоваться.

С другой стороны, мы не намерены заниматься здесь детальным анализом относящихся сюда определений и строить аксиоматическую теорию с соблюдением требования независимости аксиом, установлением связи с общими

концепциями кольца, поля и т. д., ограничиваясь более узкой задачей — установлением определений, возможно более близких к тем, которые принимаются в школьном курсе, и необходимым для дальнейшего комментированием этих определений.

Итак, поставим себя в то положение, в котором мы находимся при введении отрицательных чисел. Мы можем опираться, как на известный материал, на всю совокупность сведений о натуральных числах и обыкновенных дробях, т. е. на все соответствующие определения, свойства действий и т. д. Все это мы будем считать так или иначе установленным и не будем подвергать здесь дальнейшему анализу. Но это еще не все. Можно трактовать вопрос на том или ином уровне абстракции. При введении отрицательных чисел и обосновании действий над ними мы можем либо привлекать к рассмотрению конкретные величины (в частности, геометрические) и использовать те или иные их свойства, либо же можем потребовать, чтобы новые понятия были построены чисто арифметическим путем, без привлечения постороннего конкретного материала. Для выяснения логической структуры дела целесообразно сейчас стать именно на эту последнюю точку зрения. Так мы и сделаем, то-есть ограничим себя пока очерченной выше областью натуральных чисел и дробей как исходной для нашего построения.

Мы намерены ввести новые числа. Что это значит? Что мы при этом должны сделать? Если следовать обычной схеме, к которой мы так привыкли в геометрии, то надо, прежде всего, дать определение вводимым новым объектам. Но здесь мы сразу же наталкиваемся на некоторое отличие от таких геометрических определений, как, например, определение треугольника, квадрата, ромба и т. д. В этих случаях речь идет о фигурах, образованных из составленных из известных элементов, и определение, присваивающее наименование какому-либо виду фигур, достаточно для того, чтобы, опираясь на известные уже геометрические факты, доказывать в качестве теорем положения, характеризующие дальнейшие свойства этих фигур.

Но не так обстоит дело с введением новых чисел. Начать с того, что отрицательные числа в обычном изложении не сконструированы непосредственно из прежнего

арифметического материала, а представляют собой существенно новые объекты, которыми мы пополняем имеющуюся у нас область чисел. То, что обычно называют определением, сводится здесь к присвоению наименования тому или иному обозначению, которое мы уславливаемся применять для новых объектов.

Таковы, в частности и нижеследующие определения, которые нам придется для начала принять (об определении, полноценном с логической точки зрения, см. ниже — в начале § 3).

Определения. Отрицательным числом называется число (натуральное или дробное), соединенное со знаком «—» (минус), поставленным перед ним, например:

$$-1, -2, -\frac{1}{2} \text{ и т. п.}$$

Положительным числом называется всякое число (натуральное или дробное), соединенное со знаком «+» (плюс) перед ним, например:

$$+1, +2, +\frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Положительные числа считаются, по определению, равными соответствующим натуральным и дробным числам, написанным без всякого знака перед ними, так что

$$+1 = 1, +2 = 2 \text{ и т. д.}$$

Число ноль, обозначаемое знаком «0», занимает особое положение и не причисляется ни к отрицательным, ни к положительным числам, хотя перед ним можно писать или подразумевать любой из знаков + или —, так что

$$+0 = -0 = 0.$$

Абсолютной величиной, или модулем, отрицательного числа называется положительное число, получающееся из данного отрицательного путем перемены знака — перед ним на знак + (который может быть, согласно установленному выше определению, и опущен).

Абсолютная величина числа обозначается с помощью прямых черточек. Так, $1 = |-1|$ есть абсолютная величина числа -1 , аналогично $2 = |-2|$ есть абсолютная величина числа -2 и т. д.

Абсолютной величиной положительного числа (и нуля) называется само это число (со знаком $+$ или без этого знака перед ним), так что

$$1 + 2 = 2 \text{ (или } +2), |0| = 0 \text{ и т. д.}$$

Совокупность определенных, таким образом, положительных и отрицательных чисел и нуля объединяют под общим названием рациональных чисел (после введения иррациональных чисел приведенные определения соответственно обобщаются и приводят к совокупности положительных и отрицательных действительных чисел).

Рассматривая только 0 и натуральные числа с тем или иным знаком, мы приходим к системе

$$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\dots$$

всех целых рациональных чисел.

Числа, одинаковые по абсолютной величине, но отличающиеся знаком, называются противоположными (по знаку), или «симметричными»; говорят, что одно из них получается из другого путем перемены знака или «изменения знака на обратный». Перемена знака обозначается знаком $-$, поставленным перед числом, заключаемым в этом случае в скобки. Так, например,

$$-(+3) = -3, -(-3) = +3 \text{ и т. д.}$$

Иногда могут встретиться и отдельно стоящие выражения со знаком $+$ перед числом, например, $+(-3)$ и $+(+3)$. Мы установим, в качестве дополнительного определения, что этот знак $+$ можно опускать во всех таких случаях, так что не только $+(+3) = +3$, но и $+(-3) = -3$.

Часто при преподавании забывают обращать внимание учащихся на эти последние соглашения; между тем, в особенности важно помнить их при употреблении буквенных обозначений для чисел (в уравнениях и неравенствах). Именно, какая-либо буква, например, x , может сама по себе обозначать отрицательное число (скажем, $x = -1$), в этом случае « $+x$ » будет обозначать отрицательное, а « $-x$ » будет обозначать положительное число. Так, при $x = -1$ будет $+x = +(-1) = -1$, в то время, как $-x = -(-1) = +1 = 1$.

В частности, $|a| = a$, если a — положительное число или нуль и $|a| = -a$, если a — отрицательное число (тогда как раз $-a$, а не $+a$, будет положительным).

Примечание. В методической литературе распространен термин «относительные» числа, применяемый для характеристики всех (положительных и отрицательных) как целых, так и дробных рациональных чисел. Ввиду наличия приведенной выше, достаточно определенной и вполне установившейся в математике терминологии, сохранение наименования «относительное число» в качестве специального технического термина для целей преподавания следует считать нецелесообразным.

По меткому выражению проф. В. Л. Гончарова, на уроках математики дети должны знакомиться с математикой и с математической терминологией, а не с методикой математики и методической терминологией.

Второе замечание относится уже к вопросу, который нельзя считать чисто терминологическим. Введение отрицательных чисел можно рассматривать—и это естественнее всего—как присоединение новых элементов к уже готовому запасу натуральных чисел и дробей, которые при этом получают наименование положительных чисел. С этой точки зрения понятия, например, о положительном числе $+2$ и натуральном числе 2 отождествляются, как мы это и сделали выше. Такое отождествление отвечает установившемуся в математике словупотреблению и ни к каким недоразумениям по существу привести не может. Однако при построении новой числовой системы—положительных и отрицательных чисел (и нуля) иногда смотрят на дело несколько иначе, именно, говорят о построении новых объектов—положительных и отрицательных чисел, для которых вводятся новые определения и устанавливаются заново законы действий. При такой точке зрения приходится—во всяком случае на известной стадии построения—отличать положительное число $+2$ от натурального числа 2, положительное число $+1/2$ от дроби $1/2$ и т. п. Поскольку, однако, определяемые таким образом «положительные числа» по всем своим свойствам совпадают с натуральными числами и дробями, положенными в основу построения и в конечном итоге обязательно должны быть с ними отождествлены, то различение положительных и «абсолютных» (беззначных) чисел по существу бессмысленно, а в преподавании является проявлением излишнего и даже—в силу сказанного выше—антинаучного педантизма.

Аналогичное замечание относится к определению абсолютной величины числа. Часто говорят: «абсолютной величиной числа называется это число, взятое без знака». С точки зрения внешнего соответствия тем определениям, которые были только что приведены, такое определение действительно передает то, что имеется в виду. Но если при этом стоять на точке зрения различения чисел просто («без знака») и положительных чисел, то под абсолютной величиной числа придется при таком определении понимать именно «число, взятое без знака», а не соответствующее положительное число (или ноль). И здесь такое различие представляется ненужным педантизмом, а запрещение считать абсолютную величину отличным от нуля числа положительным числом, перед которым в случае необходимости можно поставить знак $+$, противоречит установившейся

ся в математике практике, вследствие чего и самая формулировка «число, взятое без знака» режет слух.

Последнее замечание уже непосредственно относится к методике. Вводя знаки $+$ и $-$ в качестве знаков, поставленных перед числами, рассматриваемыми независимо от действий над ними и сохраняя те же знаки для действий сложения и вычитания, мы создаем повод для смешения «знака действия» и «знака числа». Во избежание этого в обычном изложении при одновременном их применении, число вместе со своим знаком заключают в скобки. Для той же цели были предложены и более радикальные средства: помещение знака числа не перед, а над, цифровым обозначением его абсолютной величины,

например, 5 вместо -5 или $\overset{+}{2}$ вместо $+2$. Несмотря на некоторые преимущества таких обозначений, трудно—ввиду расхождения с общепринятым в математике знакоположением—защипать приемы этого рода и приходится мириться с обычным заключением в скобки.

Вернемся теперь к характеристике приведенных определений с логической стороны. Как мы уже подчеркнули вначале, здесь речь идет об установлении терминологии и обозначений, нужных для дальнейшего—из того, что мы условились писать знаки вида « $+3$ » и « -3 » и т. п.—и называть их так-то и так-то, никаких следствий, кроме тавтологических, очевидно, вывести нельзя. В этом смысле приведенные определения, по существу, еще не являются таковыми: содержание самого понятия «отрицательное число» ими еще не фиксируется. Что же еще надо сделать? Если иметь в виду, как это мы сейчас и делаем, отвлеченную арифметическую сторону дела, то полное определение новых чисел должно заключать в себе исчерпывающие указания на то, как, по каким законам эти числа надлежит сравнивать друг с другом и с обычными натуральными и дробными числами, как и по каким законам следует производить над ними действия.

Критерии сравнения чисел и правила производства над ними действий сложения и умножения при этом ни откуда не могут быть выведены и не могут быть доказаны логическим путем; так как для такого доказательства—до принятия соответствующих определений—отсутствует исходный пункт. Прежде, чем утверждать что-либо о сложении отрицательных чисел, надо установить, что значит «сложить два отрицательных числа или отрицательное с положительным». До тех же пор, пока это не установлено с помощью определения,

понятие «суммы» для новых чисел просто лишено смысла, и делать относящиеся к этому понятию выводы — неоткуда. Наоборот, нижеследующие определения действий как раз и служат основой для дальнейших выводов, в частности, для доказательства справедливости переместительного и сочетательного законов и т. д. и для установления свойств обратных действий — вычитания и деления. Эти последние не нуждаются в особых определениях, фиксирующих способ производства этих операций, так как при построении теории отрицательных чисел мы принимаем для вычитания и деления общие для всех категорий чисел определения этих действий, как действий, обратных по отношению к сложению и умножению, т. е. полагаем

$x = a - b$, если $b + x = a$ и $y = a : b$, если $by = a$.

При построении теории естественно начать с определений, фиксирующих расположение чисел по величине.

Определения. Два рациональных числа называются равными, если они имеют один и тот же знак и если равны их абсолютные величины (числу нуль не приписывают определенного знака и считают, как было отмечено выше, что $+0 = -0 = 0$).

Положительные числа располагаются по величине в обычном порядке (в соответствии с определениями, принятыми в арифметике для натуральных чисел и дробей).

Отрицательные числа располагаются по величине в порядке, обратном расположению их по абсолютной величине, то есть, из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше.

Для того, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, часто говорят, что «из двух положительных чисел больше то, у которого абсолютная величина больше». Сама по себе эта фраза представляет собой тавтологию, так как положительное число и его абсолютная величина — одно и то же; в преподавании, однако, эта формулировка применяется для противопоставления с установленным выше определением для отрицательных чисел.

Каждое положительное число считается большим нуля (так же, как и нуль) — большим каждого из отрицательных чисел.

Мы определили здесь из двух понятий „больше“ и „меньше“ только первое, принимая, что число a меньше числа b , т. е. $a < b$, если b , по определению, больше числа a , т. е. если $b > a$.

Расположение чисел по величине наглядно иллюстрируется схемой

$$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots,$$

в которой большие числа расположены правее меньших.

Из этих определений легко вывести следствия; „ $a = a$ “ (всякое число равно самому себе), „если $a = b$, то $b = a$ “ (симметричность отношения равенства, если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$) (транзитивность¹ отношения равенства: если два числа порознь равны третьему, то они равны между собою), „если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ “ (транзитивность отношения „меньше“). Очевидно, что всякие два числа a и b сравнимы между собой в том смысле, что между ними должно иметь место одно и только одно, из трех соотношений $a = b$, $a < b$ или $a > b$.

Далее из определения следует, что, если $a = b$, то — $a = -b$ и если $a < b$, то $-a > -b$. Таким образом, соотношение „меньше“ заменяется при перемене знака у обоих чисел соотношением „больше“ и наоборот.

На схеме расположения чисел по величине перемена знака у числа отвечает переходу к числу, расположенному симметрично с ним относительно числа нуль. Ясно, что, если в этой схеме два числа a и b расположены, первое левее второго, то симметричные с ними числа располагаются в обратном порядке: первое — a правее второго, — b .

Перейдем к определениям действий.

Определения. Сложить два числа одинаковых знаков, по определению, значит: сложить их абсолютные величины и поставить перед полученным числом общий знак слагаемых.

Сложить два числа противоположных знаков, по определению, значит: найти разность их абсолютных величин и поставить перед ней знак того из слагаемых, у которого абсолютная величина больше.

Сложить какое-либо число с нулем, значит — оставить это число без изменения.

¹ От латинского слова „переходить“. Отношение равенства „переходит“ или „передается“ от a к c через промежуточные этапы $a = b$ и $b = c$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} (+3) + (+2) &= +(3+2) = +5 \\ (-5) + (-2) &= -(5+2) = -7 \\ (-5) + (+2) &= -(5-2) = -3 \\ (+5) + (-2) &= +(5-2) = +3 \\ (-5) + 0 &= 0 + (-5) = -5 \\ (+1) + 0 &= 0 + (+1) = +1 \end{aligned}$$

Для математика привычной в этих определениях говорить не о действии сложения, а о сумме чисел, т. е. формулировать их так: «суммой двух чисел и т. д., по определению, называется и т. д. Мы предпочли определения, более близкие к тексту школьных «правил». Для положительных чисел установленные определения приводят нас к обычной сумме (натуральных чисел или дробей), в полном соответствии с соглашением, дающим возможность опускать знак $+$ перед числом.

Рассматривая все возможные случаи, легко убедиться, что от прибавления положительного числа всякое число увеличивается, а от прибавления отрицательного — уменьшается. Таким образом, при $r > 0$ всегда будет $a+r > a$, а при $r < 0$ будет $a+r < a$.

Далее, нетрудно доказать — в качестве теорем — справедливость переместительного и сочетательного закона для сложения, а также убедиться в том, что после введения отрицательных чисел и нуля операция вычитания оказывается всегда выполнимой и однозначной, т. е. для всяких двух рациональных чисел a и b можно найти одно и только одно третье число r такое, что

$$b+r=a.$$

Действительно, из равенства

$$b+r=r+b=a$$

должно следовать

$$r+b+(-b)=a+(-b) \dots \dots \dots (1)$$

Здесь через $(-b)$ обозначено число, противоположное числу b по знаку.

Согласно определению сложения

$$b+(-b)=0$$

и, следовательно, из (1) получаем

$$r=a+(-b).$$

Приведенное рассуждение показывает, что число, удовлетворяющее требованию $b + r = a$, должно равняться сумме числа a и числа, противоположного по знаку с числом b . Обозначая, в соответствии с общим определением вычитания, как действия, обратного сложению, число r знаком $a - b$ (разность чисел a и b), мы получим, следовательно:

$$r = a - b = a + (-b).$$

Эта формула избавляет нас, таким образом, от рассмотрения операции вычитания как самостоятельного действия — после введения отрицательных чисел вычитание можно рассматривать как прибавление числа, по знаку, противоположного вычитаемому.

Поэтому результат последовательных прибавлений и вычитаний, например,

$$a - b + c - d - e = a + (-b) + c + (-d) + (-e)$$

называют в общем случае алгебраической суммой чисел.

В силу соответствующих свойств сложения для таких сумм справедлив переместительный и сочетательный закон.

Относительно операции „перемены знака“ можно заметить еще, что

$$\begin{aligned} -(a + b) &= -a + (-b) = -a - b \\ -(a - b) &= -a + b = b - a \end{aligned}$$

вообще,

$$\begin{aligned} -(a - b + c - d) &= -a + (+b) + (-c) + (-d) \\ &= -a + b - c + d, \end{aligned}$$

т. е. для того чтобы переменить знак у алгебраической суммы, достаточно переменить знаки у всех слагаемых и полученные результаты сложить. Для доказательства достаточно рассмотреть случай двух слагаемых a и b . При одновременном изменении их знаков абсолютная величина суммы, согласно определению сложения, не изменится, но знак суммы изменится во всех случаях на обратный.

С рассмотрением разности двух чисел можно связать и вопрос об их взаимном расположении. Именно верна теорема: a больше b , равно b или меньше b , в соответствии с тем, будет ли разность $a - b$ положительным числом, нулем или отрицательным числом.

Действительно, как мы видели выше, при $r = b - a > 0$ будет $b = a + r > a$, а при $r = b - a = 0$ получим $b = a + r = a + 0 = a$, при $r = b - a < 0$ получим $b = a + r < a$.

Отсюда, как следствие, выводим: если $a < b$ (или $a = b$) и $c < d$, то $a + c < b + d$ (почленное сложение неравенств). Действительно, $b = a + r$, где $r > 0$ и $d = c + s$, где $s > 0$, так что $b + d = (a + c) + (s + r)$, где $s + r > s > 0$, т. е. $s + r$ — положительное число. Поэтому $b + d > a + c$.

Так как соотношение $a = b + r$ при $r > 0$ очень наглядно передает смысл неравенства $a > b$ и позволяет сравнительно просто и единообразно устанавливать свойства неравенств, то в элементарных учебниках обычно принимают (и это вполне целесообразно) указанное соотношение за определение неравенства $a > b$. Однако при этом приходится определения понятий „больше“ и „меньше“ ставить в зависимость от определения действий, в чем прямой необходимости, как мы видели, нет.

Перейдем к операции умножения.

Определение. Для умножения на положительное число сохраняются те же определения, которые установлены для натуральных чисел и дробей.

Именно произведение числа (положительного, отрицательного или нуля) a на натуральное число k есть, по определению, сумма k слагаемых, каждое из которых равно a

$$a \cdot k = a + a + \dots + a \quad (k \text{ слагаемых});$$

так,

$$(-5) \cdot (+3) = (-5) + (-5) + (-5) = -15.$$

Для $k = 1$ полагаем $a \cdot 1 = a$.

Произведение a на $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, есть, по определению, $\frac{1}{n}$ -ая часть a , то есть такое число, взяв которое n раз слагаемым, мы получим a .

$$\text{Так } (-12) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = -4, \text{ потому что}$$

$$-12 = (-4) + (-4) + (-4).$$

Произведение a на $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, есть, по определению, сумма m слагаемых, каждое из которых равно $\frac{1}{n}$ части a .

Так

$$(-15) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = (-15) \cdot \frac{1}{3} + (-15) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= (-5) + (-5) = -10.$$

Новым является только

Определение. Умножить какое либо число a на отрицательное число $b = -\beta$ (здесь $\beta = |b|$) значит, по определению, умножить a на абсолютную величину числа b и в результате переменить знак, так что

$$a \cdot b = a \cdot (-\beta) = -a\beta.$$

Всякое число при умножении на нуль дает, по определению, в произведении нуль, т. е. $a \cdot 0 = 0$.

Так

$$\begin{aligned} (+3) \cdot (-5) &= -[(+3) \cdot 5] = -15 \\ (-3) \cdot (-5) &= -[(-3) \cdot 5] = -(-15) = +15 \\ (+3) \cdot 0 &= 0; \quad (-3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому можно было бы принять в качестве определения умножения для сомножителей любых знаков правило. согласно которому при перемножении двух чисел a и b перемножаются их абсолютные величины и полученное произведение снабжается знаком $+$, если a и b имеют одинаковые знаки и знаком $-$, если разные. При этом необходимо было бы отметить, что в случае, когда множитель — положительное число, это определение оказывается согласованным с принятым ранее для натуральных и дробных чисел.

Как следствие из принятого определения вытекает, что при изменении знака у одного (любого) из сомножителей произведение меняет знак. Далее, чрезвычайно важное значение (в особенности при решении уравнений) имеет следующее следствие: произведение двух (или нескольких) чисел равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю. В противном случае, произведение нескольких сомножителей имеет знак $+$, если в него входит четное, и знак $-$, если входит нечетное число отрицательных сомножителей.

Умножение какого-либо числа на (-1) сводится к перемене знака этого числа. $(-1)^n = +1$, если n четное и -1 , если n — нечетное. Англичане пишут даже вместо $(-1)^n$ просто $(-)^n$. Непосредственно, очевидно, соблюдение переместительного закона умножения: ab всегда равно ba . Сочетательный закон $(ab)c = a(bc)$ также доказывается без труда — абсолютные величины и знаки обеих частей записанного равенства одинаковы при любых значениях a , b и c . Верен и распределительный закон

$$(a+b)c = ac + bc. \quad (*)$$

Именно, в силу распределительного закона умножения положительных чисел мы будем иметь $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \dots (1)$, если α, β и γ — положительные числа и $(\alpha - \beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma \dots (2)$, если $\alpha > \beta > 0$ и $\gamma > 0$. Используя сделанное выше замечание об изменении знака произведения, мы можем к этим случаям свести все формы осуществления равенства (*) при любых значениях букв. Так, если, например,

$$a = -\alpha, b = -\beta, c = -\gamma,$$

то, по определению,

$$a + b = -(\alpha + \beta)$$

и

$$(a + b)c = -(\alpha + \beta)(-\gamma) = (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Но и

$$ac + bc = (-\alpha)(-\gamma) + (-\beta)(-\gamma) = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Аналогично, если $a = \alpha, b = -\beta$ и $\alpha > \beta$, то при $c = \pm \gamma$ получим

$$(a + b)c = (\alpha - \beta)(\pm \gamma) = \pm(\alpha - \beta)\gamma = \pm\alpha\gamma \mp \beta\gamma.$$

Но и

$$ac + bc = \alpha(\pm \gamma) + (-\beta)(\pm \gamma) = \pm\alpha\gamma \pm \beta\gamma \text{ и т. д.}$$

Поэтому, рассматривая операцию перемены знака числа, как умножение на (-1) , а знак $-a$, как сокращенное обозначение произведения $(-1)a$, мы можем правило раскрытия скобок

$$-(a - b + c - \dots + l) = -a + b - c + \dots - l$$

трактовать как частный случай распределительного закона умножения.

Так как по самому определению умножение есть действие однозначное, то очевидно, что из $a = b$ и $c = d$ следует $ac = bd$ и, в частности, из $a = b$ следует $ac = bc$ (равенства можно почленно перемножать, обе части равенства можно умножить на одно и то же число). Если же $a < b$ и $c \leq d$, то отсюда нельзя сделать заключения, что $ac \leq bd$.

Действительно положим $b = a + p$, где $p > 0$ и $d = c + q$, где $q > 0$. Мы получим

$$bd = ac + pc + aq + pq.$$

Сумма $pc + aq + pq$ будет наверно не отрицательной, если $a > 0$ и $c \geq 0$ или $a \geq 0$ и $c > 0$. В остальных случаях никакого определенного заключения сделать нельзя, если исходить только из знания того, что $a < b$ и $c < d$. Так, например,

$$\begin{aligned} -1 < 2 \text{ и } -3 < 1, \text{ но } (-1) \cdot (-3) > 2 \cdot 1, \\ -4 < -2 \text{ и } 2 < 5, \text{ но } (-4) \cdot 2 > (-2) \cdot 5. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} -1 < 2 \text{ и } -3 < 5 \text{ и } (-1) \cdot (-3) < 2 \cdot 5, \\ -4 < -2 \text{ и } 2 < 3 \text{ и } (-4) \cdot 2 < (-2) \cdot 3. \end{aligned}$$

и т. п.

Именно поэтому такого рода „почленное перемножение“ (и, конечно, также и деление) неравенств, члены ко-

торых имеют отрицательные знаки, никогда не применяется. В противоположность этому очень часто приходится оба члена неравенства $a < b$ умножать на одно и то же число c . Здесь из равенства $b = a + p$, где $p > 0$, получим $bc = ac + pc$, причем $pc > 0$, если $c > 0$ и $pc < 0$, если $c < 0$. Следовательно, при $c > 0$ из $a < b$ следует $ac < bc$, а при $c < 0$ из $a < b$ следует $ac > bc$ (при умножении на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный).

Действие деления, определяемое как действие, обратное умножению, сводится к делению абсолютных величин чисел с тем же правилом знаков, что и для произведения.

Действительно, если a и $b \neq 0$ имеют одинаковые знаки, то неотрицательное число $\frac{|a|}{|b|}$, будучи умножено на b , дает в произведении число a по величине и по знаку, так что $a : b = \frac{|a|}{|b|}$. Если же a и b — противоположных знаков, то $-\frac{|a|}{|b|} \cdot b = a$, так что $a : b = -\frac{|a|}{|b|}$. В частности, при $a \neq 0$ будет $\frac{a}{-a} = \frac{-a}{a} = -1$, а при $a \neq b$ будет $\frac{a-b}{b-a} = -1$.

Действие деления на нуль исключается из рассмотрения, так как символу $\frac{a}{0}$ при $a \neq 0$ нельзя приписать никакого числового значения, а символу $\frac{0}{0}$ можно было бы по смыслу действия деления, приписать любое числовое значение, что могло бы привести, в случае включения этого символа в систему чисел, к различного рода недоразумениям и ошибкам.

Нельзя также и делить обе части равенства на нуль, т. е. при $d = 0$ из равенства $ad = bd$ нельзя заключать, что $a = b$; например, $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, но $1 \neq 2$. Таким образом, включать символы, содержащие в знаменателе нуль, в вычисления наравне с числами — нельзя.

Упомянутое выше свойство произведения обращаться в нуль только при обращении в нуль одного из сомножителей равносильно со свойством однозначности действия деления (на число, отличное от нуля) или, что то же, с правом почленного деления равенств на число, отличное от нуля. Действительно, если $ac = bc$, то $(a - b)c = 0$, поэтому, при $c \neq 0$ непременно $a - b = 0$, то есть, $a = b$.

(иными словами, деля число $N=ac=bc$ на $c \neq 0$ мы не можем получить двух различных частных: a и $b \neq a$).

Формальные свойства операции деления можно свести к соответствующим свойствам умножения, так как деление на b можно рассматривать как умножение на $\frac{1}{b}$.

В частности, при почленном делении обеих частей неравенства на отрицательное число 0, знак неравенства изменяется на противоположный.

Отметим еще, что при $b \neq 0$ и $b_1 \neq 0$ из $b < b_1$ следует $\frac{1}{b} > \frac{1}{b_1}$, если b и b_1 — одного знака и следует $\frac{1}{b} < \frac{1}{b_1}$, если b и b_1 — разных знаков, как это сразу видно из тождества $\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} = \frac{b_1 - b}{bb_1}$.

Этим по существу и исчерпывается формальная сторона дела. Можно строить теорию и иначе, но мы намеренно придерживались определений, возможно более близких к тем, которые обычно помещаются в учебной литературе.

Из других вариантов изложения упомянем только о теории пар, о которой мы скажем несколько слов ниже (стр. 25—26) и о теории, в которой в основу кладется вводимое сверх числа 0 основное отрицательное число — 1 (отрицательная единица), подчиняемое правилам действий

$$+1 + (-1) = 0, (+1)(-1) = -1, (-1)(-1) = +1 \dots (*)$$

Вводя далее обозначения $-2, -3, \dots$ и т. д. для сумм $(-1) + (-1) = 2 \cdot (-1)$, $(-1) + (-1) + (-1) = 3 \cdot (-1)$ и условившись при сложении и перемножении чисел вида $a(\pm 1)$ и $b(\pm 1)$ применять сочетательный и переместительный законы для того, чтобы ввести в действие правила (*), мы придем в итоге к той же системе определений, что и выше. Совокупность положительных и отрицательных (здесь пока только целых) чисел можно, таким образом, рассматривать, как систему чисел вида

$$\alpha \cdot (+1) + \beta \cdot (-1)$$

с «двумя единицами», комбинирующимися друг с другом по законам (*). Это по форме аналогично введению комплексных чисел с помощью присоединения мнимой единицы i .

§ 3. МОТИВИРОВКА ОПРЕДЕЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ПЕРМАНЕНТНОСТИ

Вернемся к поставленному в § 1 вопросу. Если придерживаться узко формальной точки зрения, то можно, конечно, при построении теории отвести всякие вопросы, требующие разъяснения принятых определений. Так, на вопрос: «Что такое отрицательные числа?» можно ответить:

это—объекты, которые могут входить наравне со знаковыми нам натуральными числами и дробями в любые вычисления на основе принятых (§ 2) определений. Совокупность этих последних, т. е. принятые нами условия, устанавливающие отношения равенства и неравенства и действия сложения и умножения для отрицательных чисел исчерпывающим образом определяют эти последние.

Вполне законно пожелать дать отрицательным числам полное формальное определение (не сводящееся к простому обозначению, как на стр. 8). Соединивши все принятые условия в одно, можно сформулировать такое определение следующим образом: «отрицательными числами называются объекты, обозначаемые так-то для которых равенство и неравенство определяется так-то и так-то, а действия сложения и умножения так-то и так-то». Название «числа» оправдывается при этом тем, что над этими объектами можно производить действия и сравнивать их между собою по формальным законам, являющимся обобщением тех, которые имеют место для натуральных чисел и дробей с натуральным числителем и знаменателем. В силу этого после присоединения отрицательных чисел и нуля можно говорить о новой числовой области всех рациональных чисел. В ней, в отличие от области положительных чисел, операция вычитания всегда выполнима, так что в буквенной записи символ разности $a-b$ всегда имеет смысл, каковы бы ни были a и b .

Предположим, что кто-нибудь этим ответом не удовлетворится и заинтересуется тем, почему же, с какой стати отрицательные числа сравниваются именно по таким-то законам, складываются по таким-то законам. Ответ может оказаться таким.

«Вопрос излишен и даже бессодержателен. Мы именно и называем отрицательными числами объекты, которые подчинены указанным законам. Объекты, подчиняющиеся иным законам, мы не называем числами, а если и называем, то это будут другие числа, ну, там, комплексные или еще какие-нибудь. Почему мы принимаем вот те определения и называем удовлетворяющие им объекты особым именем и интересуемся этими объектами, вводим их в вычисления? Так нам угодно. Если Вам неудобно, не делайте этого—тогда нам с Вами не по дороге, у нас будет своя арифметика и алгебра, с отрицательными числами, а Вы—как хотите. Сейчас, ведь, идет речь о формальном построении теории. Для нас достаточно того, что принятые нами определения не содержат противоречий и полностью определяют законы действий над новыми объектами. Если Вас интересует история вопроса, происхождение этих определений—займитесь этим, это особая статья, не имеющая прямого отношения к делу. Если же Вас интересуют, какие проистекают последствия—изучайте вместе с нами алгебру, и Вы увидите, что отрицательные числа полезны: с их помощью упрощаются многие вычисления и решаются важные задачи».

Если точку зрения, с которой здесь даны ответы, возвести в философский принцип, то мы придем к системе, известной под названием «конвенционализма» (конвенция—условие, соглашение). Для нас же было здесь существенно лишь подчеркнуть формально-логи-

ческую сторону вопроса, которая действительно очень рельефно выступает при такой трактовке.

Остающееся и после приведенных ответов чувство неудовлетворенности в достаточной мере свидетельствует об узости этой концепции — отказ от дальнейшего исследования как раз и характерен для идеалистических философских установок в области методологии математики и поэтому для нас неприемлем.

В более детальное рассмотрение относящихся сюда философских вопросов мы здесь входить не можем и позволим себе отослать интересующегося ими читателя к специальной литературе.

Но постараемся выяснить, почему принимаются именно такие, а не другие определения и зачем это делается, то есть попытаемся подробнее мотивировать принятие этих определений.

Такую мотивировку можно дать, не выходя за пределы арифметической постановки вопроса, т. е. упоминая только о числах и их свойствах.

Это делается обычно так. Говорят: в области положительных чисел операция вычитания не всегда выполнима. В буквенной записи $a - b$ приходится всегда подразумевать оговорку, что $a > b$. Уравнение типа $x + b = a$ имеет решение не всегда, а только тогда, когда $a > b$. Так вот, это неудобно. Для того чтобы вычитание сделать всегда выполнимым, т. е. для того, чтобы уравнения типа $x + b = a$ всегда имели решения, мы и вводим нуль и отрицательные числа, стремясь при этом сохранить те формальные законы действий, которые нам известны в системе обыкновенных (положительных) чисел. Вот из этой цели и этого стремления и вытекает необходимость принять именно те определения, которые мы привели в § 2. Эту необходимость можно обнаружить путем логического рассуждения, но только нельзя принимать эти рассуждения за доказательство определений — определения, по самому своему смыслу, доказательству не подлежат.

Именно рассмотрим уравнение $x + b = a$. Введем при $a < b$ новое число γ в качестве решения этого уравнения, т. е. положим $\gamma + b = a$. Посмотрим, не будет ли то же самое γ решением еще других аналогичных уравнений. Пусть еще $\gamma + d = c$. Так как мы собираемся сохранить однозначность действия сложения, то, складывая написанные равенства крест на крест, получим $(\gamma + b) + c = a + (\gamma + d)$. Из условия сохранения сочетательного и переместительного закона должно следовать, далее $\gamma + (b + c) = \gamma + (d + a)$.

Если мы желаем сохранить и монотонность действия сложения (увеличение суммы при увеличении одного из

лагаемых), то отсюда необходимо будет следовать, что $b + c$ должно равняться $d + c$ или, что то же, $b - a = d - c$. Другими словами, одно и то же γ должно отвечать всем тем парам чисел a, b , для которых разность $r = b - a$ имеет одно и то же значение. Число γ , таким образом, вполне определяется этой разностью. Назовем ее абсолютной величиной числа γ и введем (при $b > a$) обозначение $\gamma = (-r) = a - b$. Равенство $b + (-r) = a$, стало быть, равносильно равенству $b = a + r$.

В случае же $b = a$ введем обозначение $\gamma = 0$. Нуль, „0“ есть, следовательно, число, вводимое в качестве разности двух любых, равных между собой чисел, т. е. число, определяемое соотношением $b + 0 = b$ при любом b .

Точка зрения, с которой мы здесь подходим к отрицательным числам, может быть образно охарактеризована так: отрицательное число $(-r)$ вводится в вычисления с таким расчетом, чтобы в сумме оно уничтожало r положительных единиц; если $b = a + r$, то $b + (-r) = a + r + (-r) = a$.

Если потребовать при этом выполнения сочетательного и переместительного законов сложения, то из только что указанного расчета вытекает, очевидно, необходимость принять при сложении положительных и отрицательных чисел определения стр. 13—14.

$$\begin{aligned} (-r) + (-s) &= -(r + s); & +r + (-s) &= r - s \text{ при } r > s; \\ +r + (-s) &= -(s - r) \text{ при } s < r \text{ и } (+r) + (-r) &= 0. \end{aligned}$$

Более подробно это выясняется следующим образом.

Пусть $b + \alpha = a$ и $d + \beta = c$; тогда из условия сохранения формальных свойств действия сложения получим $b + d + \alpha + \beta = a + c$ и, следовательно, $\alpha + \beta = (a + c) - (b + d)$.

В этой формуле правая часть обозначает положительное число при $a + c > b + d$ и отрицательное число или нуль при $a + c \leq b + d$. В ней, как легко убедиться, заключены все случаи, перечисленные в определении стр. 13. Действительно, при $\alpha = \beta - r$ и $\beta = -s$ получим $b = a + r$ и $d = c + s$, так что

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (-r) + (-s) = (a + c) - (b + d) = \\ &= -[(b + d) - (a + c)] = -(r + s). \end{aligned}$$

При

$$\alpha = r \text{ и } \beta = -s \text{ и } r > s$$

получим

$$a = b + r \text{ и } c = d - s,$$

так что

$$\alpha + \beta = r + (-s) = (a + c) - (b + d) = b + r + d - s - b - d = r - s,$$

а при

$$r < s \text{ из } b = a - r \text{ и } d = c + s$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= r + (-s) = -[b + d] - (a + c) = \\ &= -[a - r + c - s - a - c] = -(s - r). \end{aligned}$$

При $r = s$ придем к необходимости положить

$$\alpha + \beta = r + (-r) = 0.$$

Заметим (это нам позже понадобится), что требование равенства абсолютных величин α и γ при различии знаков есть необходимое условие равенства:

$$\alpha + \beta = 0.$$

Подчеркнем смысл приведенных рассуждений: ими доказывается, что *требование* сохранения для сложения переместительного и сочетательного законов и закона монотонности приводит нас к необходимости *принять* при введении новых чисел указанные определения действия сложения.

Перейдем к умножению. Если распределительный закон умножения по отношению к сложению должен сохраниться, то прежде всего (так как $a - a = 0$),

$$0 \cdot \gamma = (a - a) \gamma = a\gamma - a\gamma = 0.$$

Теперь из равенства $r + (-r) = 0$ будет следовать на основании того же требования сохранения распределительного закона:

$$r\gamma + (-r)\gamma = 0 \cdot \gamma = 0 \text{ при всяком } \gamma.$$

Согласно сделанному выше замечанию о равенстве $\alpha + \beta = 0$, заключаем отсюда, что определение умножения должно быть сформулировано так, чтобы было

$$(-r)\gamma = -r\gamma,$$

т. е. при перемене знака у одного из сомножителей (в силу переместительного закона, который мы также стремимся сохранить — все равно у какого) — произведение должно изменить знак. Оставляя для положительных чисел обычное

Умножение $(+r)(+s)=rs$ получим $(-r)(+s)=(+r)(-s)=-rs$ и $(-r)(-s)=-(-rs)=rs$.

Умножение на натуральное число s при этом сохраняет, как раз в силу распределительного закона, обычный смысл образования суммы s слагаемых, равных множимому:

$$(-r)+(-r)+\dots+(-r)=(-r)s=-rs.$$

Формальные требования, наложенные на число нуль и на отрицательные числа, как на корни уравнений типа $x+b=a$, при $b \neq a$ не определяют еще расположения чисел по величине; однако, замечая, что для положительных чисел a и b разность $a-b$ равна положительному числу, если $a > b$, нулю, если $a=b$, и отрицательному числу, если $a < b$, естественно распространить эти положения, в качестве определений, и на случай, когда a и b — числа любых знаков. Таким образом, найдем, что нуль меньше любого положительного и больше любого отрицательного числа, отрицательные числа меньше всех положительных и тем меньше, чем их абсолютная величина больше, в согласии с определением (стр. 12).

Изложенная здесь мотивировка определения опирается в основном на стремление сохранить при введении новых чисел те формальные законы действия, которые имели место в прежней числовой системе и потому известна под названием «принципа перманентности (сохранения, постоянства) формальных законов» (Ганкеля).

Этот принцип может служить для той же цели и при введении иррациональных, мнимых и — в известной мере — иррациональных чисел. Для случая отрицательных чисел ему часто придается несколько отличная от принятой нами, но равносильная ей по существу формулировка. Именно, вместо того, чтобы исходить из свойств операции сложения, как мы это сделали выше, исходят из формальных свойств операции вычитания и говорят так. Мы вводим символ разности a и b для случая, когда эта разность не существует в области положительных чисел и производим над ним действия по формальным законам, которым подчиняется разность положительных чисел в тех случаях, когда она существует. Так, мы положим

$$\begin{aligned} a-b & \stackrel{>}{=} c-d, \text{ если } a+d \stackrel{>}{=} b+c \\ (a-b) & \stackrel{<}{=} c-d, \text{ если } a+d \stackrel{<}{=} b+c \\ (a-b) & + (c-d) = (a+c) - (b+d) \\ (a-b) \cdot (c-d) & = ac+bd - (bc+ad). \end{aligned}$$

При этой форме изложения трудно проследить за тем, в каком смысле применяется знак $(-)$: как составная часть нового символа или как знак вычитания. Поэтому здесь предпочитают новые числа вводить в форме пар положительных чисел (a, b) , избегая до поры до времени писать знак „ $-$ “ между числами a и b . Число нуль будет представлено парами равных чисел (a, a) , (b, b) , . . . , число (-1) — парами вида $(r, r+1)$ и т. д. Отметим, в качестве одного из формальных преимуществ такой теории, отсутствие необходимости в словесных объяснениях при производстве действий: так, сложение пар (a, b) , (b, d) всегда можно произвести, написав пару $(a+c, b+d)$ и ничего не упоминая о взаимоотношении между абсолютными величинами.

Изложенное еще нельзя считать исчерпывающим ответом на поставленный вопрос.

Действительно, и сейчас мы вправе спросить: хорошо, а зачем же нужно стремиться к тому, чтобы уравнения типа $x + b = a$ были всегда разрешимы? Зачем понадобилось, чтобы операция вычитания была всегда выполнима?

На этот вопрос также можно дать до некоторой степени убедительный ответ, не выходя за пределы самой алгебры—ответ, уже по причине этого последнего ограничения, конечно, не охватывающий всей ситуации в целом.

Именно, прежде всего совершенно очевидны преимущества, которые проистекают в отношении буквенного исчисления (и некоторых частных случаев в производстве и арифметических действий) от введения отрицательных чисел. Мы всегда можем оперировать теперь с символом $a-b$ не оговаривая, что a должно быть больше b . Операция вычитания включается, как частный случай прибавления числа противоположного знака в операцию сложения, с единой для всех случаев формулировкой распределительного закона и т. д. Если даже стать на ту точку зрения, что знак $a-b$ при $a < b$ сам по себе «не имеет реального смысла», то применение его в промежуточных вычислениях может подчас оказаться весьма полезным и, во всяком случае, развязывает нам руки в цепи последовательных сложений и вычитаний. Так, можно написать $15+3-6+2-4=15-3-2=15-5=10$, вместо того, чтобы производить действия по порядку, и если промежуточные результаты « -3 » и « -2 » признавать «не имеющими смысла», то начальная и конечная часть формулы имеют смысл и выведенное равенство между ними — верно. Вводимые по таким соображениям «идеальные» объекты могут играть роль катализаторов в математических «реакциях», и применение их вполне законно.

С еще большей рельефностью такая роль отрицательных чисел проявляется при решении уравнений. Известные правила о перенесении членов из одной части равенства в другую с обратным знаком и т. д. выражают отношения между компонентами действий и могут быть введены и независимо от введения отрицательных чисел, только с оговоркой—если левая и правая части имеют смысл, т. е., если все вычитания выполнимы. Однако эта оговорка стеснительна—решая уравнение, мы можем не знать заранее, выполнимо ли или нет то или иное действие, и если оно окажется, после подстановки найденных значений неизвестных, невыполнимым в области положительных чисел, то это—без введения отрицательных чисел—вынуждало бы нас отвергнуть выбранный метод преобразования и усомниться в полученном результате, в чем действительно надобности (это и обнаруживается путем построения теории отрицательных чисел) нет.

Приведем пример. Пусть какая-либо задача привела нас к уравнению

$$(2+3x) - 4 = 2(1+x) - 3.$$

Раскрывая скобки, получим

$$2+3x-4 = 2+2x-3. \quad (*)$$

Отбрасывая слагаемое 2 в обеих частях, найдем

$$3x-4 = 2x-3 \quad (**)$$

и, далее,

$$3x-2x = 4-3, \quad x=1.$$

Но подставляя это значение x в уравнение (**), получим

$$3-4 = 2-3,$$

т. е., равенство, обе части которого не имеют смысла в области положительных чисел. Исходное уравнение, однако, удовлетворяется при $x=1$, именно, мы получим равенство $(2+3) - 4 = 2 \cdot 2 - 3$, обе части которого равны 1. Если не вводить отрицательных чисел, то при переходе от (*) к (**) мы должны были бы сказать; вычитаем из обеих частей равенства по 2, что выполнимо при условии $2+3x-4 > 2$. Проверяя это условие законности преобразования для $x=1$, мы нашли бы $2+3-4=1 < 2$ и, следовательно, не могли бы решать уравнение указанным путем и должны были бы искать другого способа. Но и это

было бы не так-то просто. Например, написать вместо (*) уравнение $4 - 3x - 2 = 3 - 2x - 2$ тоже нельзя было бы так как, если обе части (*) имеют смысл, то обе части нового уравнения наверно не имели бы смысла, хотя получаемое отсюда прибавлением 2 уравнение $4 - 3x = 3 - 2x$ вновь имеет смысл при $x=1$ (в области положительных чисел).

Трудно даже вообразить, сколько добавочных оговорок — рогаatok на пути производства самых обычных преобразований — возникло бы при отсутствии отрицательных чисел. Неудивительно, что эти числа приходится вводить в самом начале курса алгебры. Такого рода аргументация может быть сообщена учащимся в лучшем случае в форме обещания — «подождите, увидите».

Надо, впрочем, отметить, что в ряде современных учебников алгебры (английских и американских) отрицательные числа вводятся сравнительно поздно — тогда, когда учащиеся уже ознакомились не только с основами буквенного исчисления, но и с решением уравнений простейшего типа и с применением координатной сетки для иллюстрации числовых соотношений.

Нам кажется, однако, что ознакомление с понятием отрицательного числа и законами действий над ними целесообразнее вести в возможно тесной связи со знакомым учащимся арифметическим материалом и притом по возможности раньше (см. § 6).

§ 4. МОТИВИРОВКА ОПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРАКТИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

Совершенно очевидно, что изложенный в § 3 ответ на поставленный на стр. 22 вопрос не может служить целям преподавания — в лучшем случае с ним можно рассчитывать ознакомить учащихся в старших классах.

В поисках возможно более близкого к знакомому учащимся арифметическому материалу разъяснения правил действий над отрицательными числами неоднократно делались попытки частично использовать указанный ход рассуждения. Здесь, однако, то, что может претендовать лишь на роль мотивировки определения, воспринимается обычно учащимися, как «доказательство правил» сложения и умножения отрицательных чисел.

Сюда относится, прежде всего, подход к объяснению знака отрицательного числа и объяснению действий сложения чисел разных знаков на основе истолкования числа $(-r)$, как „вычитаемого“, оторванного, однако, от соответствующего „уменьшаемого“, которое может сначала подразумеваться, а потом и совсем перестает упоминаться. В этом смысле равенство $-r+s = -(r-s)$ при $r>s$ означает, что если нужно было вычесть r , а потом прибавить $s<r$, то останется еще вычесть $r-s$, а равенство $-r+s = +(s-r)$ при $s>r$ означает: „если нужно было вычесть r , а потом прибавить s , то вместо этого можно прибавить $s-r$ “. Аналогично $-r-s = -(r+s)$ толкуется, как запись того, что два последовательных вычитания равносильны вычитанию суммы $r+s$ и т. п. Не подлежит сомнению, что такой подход к вопросу частично помогает учащимся приобрести нужные навыки в обращении с числами разных знаков на чисто арифметической основе. Однако здесь, с одной стороны, остается в тени введение отрицательных чисел, как самостоятельных объектов (для характеристики значений величин) и с другой стороны, методологическая путаница сказывается уже и в обозначениях: неясно, почему пишется, например, $(-r)+(-s)$ вместо $-r-s$, и действие называется „сложением“, в то время, как речь идет о последовательно произведенных вычитаниях. Несмотря на все это, простота схемы заслуживает внимания с методической точки зрения и мы ниже (§ 6) попытаемся отвести ей соответственное место в преподавании.

Видоизменением того же приема является пояснение, при котором $(-r)$ воспринимается, как число, в качестве слагаемого „уничтожающее“ в сумме r положительных единиц. Это ближе к изложенной в § 3 формальной мотивировке и хотя для закрепления правил действий такое пояснение — именно в качестве такового — и может считаться полезным, все же и здесь отрицательные числа лишаются, так сказать, самостоятельного существования, и фигурируют только в качестве „слагаемых“.

То же отождествление знака числа и знака действия, о котором мы только что говорили, может быть использовано и для установления определения умножения. Именно, исходя из тождества

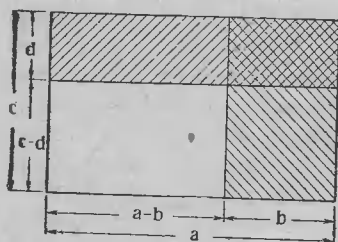
$$(-b) \cdot (c-d) = (a-b)c - (a-b)d = ac - bc - (ab - bd) = \\ = ac - bc - ad + bd,$$

выводимого элементарным путем из основных свойств действий, и рассматривая правую часть, как сумму произведе-

ний чисел a , b , c и d с теми знаками, с которыми они входят в левую часть, получим

$$\begin{aligned} (+a)(+c) &= +ac; (+a)(-d) = -ad; \\ (-b)(+c) &= -bc; (-b)(-d) = +bd. \end{aligned}$$

Здесь, по существу, дело сводится к требованию сохранения (перманентности) распределительного закона, но рассуждения неизменно производят на учащихся впечатление доказательства. За таковое они и выдавались в свое время в некоторых учебниках так же, как и соответствующая геометрическая интерпретация на чертеже:



Черт. 1

Здесь площадь незатрихованного прямоугольника, равная $(a-b)(c-d)$, равна площади ac без площадей затрихованных прямоугольников bc , но с поправкой: построенный на „отрицательных“ отрезках $-b$ и $-d$ прямоугольник bd нужно прибавить, так как он был вычтен дважды: и как часть прямоугольника ad и как часть прямоугольника bc .

Чаще расчленяют определение умножения и, сохраняя для положительного множителя обычный смысл действия умножения, пишут $(-5)(+3) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$. Определение $(+3)(-5) = -15$ мотивируется стремлением сохранить переместительный закон. Однако для определения $(-5)(-3) = +15$ основания приходится искать попрежнему в распределительном законе. Убедительной для учащихся представляется здесь аргументация, по форме напоминающая принцип перманентности: при умножении положительного числа на отрицательный множитель, надо умножить множимое на абсолютную величину множителя и у результата изменить знак. Применяя то же правило к умножению отрицательного числа на отрицательное, придем к формуле

$$(-5)(-3) = -(-5) \cdot 3 = -(-15) = +15.$$

Так, мы читаем в учебнике начала XIX века: «Начальные Основания Алгебры, извлеченные из Оснований сей Науки знаменитого Эйлера и ныне вновь изданные от главного Правления Училищ» (1810 г.):

Остается рассмотреть, какой знак будет иметь произведение количества $-a$, умноженного на $-b$. Во-первых, известно, что произведение относительно букв будет ab ; но поставить ли перед сим произведением знак $+$ или знак $-$, в том сказать еще ничего не можно, известно только то, что одному которому-нибудь тут быть должно, поелику все числа суть либо положительные, либо отрицательные. Но сей знак не может быть $-$, потому что $-a$, умноженное на $+b$, дает $-ab$; нельзя также, чтобы $-a$, умноженное на $-b$, давало то же следствие какое дает $-a$, умноженное на $+b$; но должно дать противное, т. е. $+ab$.

Воспринимаемое, как доказательство, это рассуждение совершенно замаскировывает наличие нового определения и отвечает наивной точке зрения на отрицательные числа и законы действий над ними, как на нечто, предустановленное свыше и не зависящее от творческой деятельности человека.

Для того чтобы примирить начинающего с парадоксальным для него соотношением, и этот простой прием хорош, но мы вынуждены искать других путей и — во всяком случае — другой формы применения этого приема: методологическая путаница в этом вопросе и прямой обман учащихся при преподавании математики в наше время могут создать предпосылку непонимания учащимися самих основ математического метода, за что многим из них пришлось бы серьезно расплачиваться в дальнейшем.

Несколько лучше в этом отношении применение общего определения умножения Коши (Ньютона): «произведение образуется из множимого так, как множитель образован из положительной единицы». Полагая $-3 = -(1+1+1)$ получим, следуя этому определению:

$$\begin{aligned} (+5) (-3) &= -(5+5+5) = -15 \\ (-5) (-3) &= [(-5) + (-5) + (-5)] = -15 = +15 \end{aligned}$$

Против определения Коши неизменно выдвигалось возражение, заключающееся в том, что смысл слов «образован из» недостаточно определен. Что означает «образовать (-3) из $(+1)$ »? И как это вообще возможно? Если представлять себе дело столь же конкретно, как это обстоит в случае образования числа $+3$ из трех единиц, то здесь сразу же возникает недоумение: как это можно «образовать» отрицательное число «из» положительной единицы? Если же речь идет о формальных способах получения числа

(—3) из числа $+1$, то, может быть, это надо делать так: $-3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -(1+1+1+1)$? Прodelывая те же действия над числом $+5$, мы получим $5 \cdot 5 \cdot 5 - (5+5+5+5) = 125 - 20 = 105$, а не (-15) . Но если дополнить определение, сказав, что множитель (-3) считается образованным из $+1$ так, что берется сумма трех единиц с обратным знаком, то определение приобретает содержание, о котором мы будем говорить ниже в § 7. Здесь можно заметить, что эта поправка делает различие между «общим» определением и данной выше формулировкой: «умножить на -3 значит умножить на 3 и в полученном результате изменить знак» уже совершенно иллюзорным.

Иногда прибегают еще к словесному обороту речи, косвенным образом отражающему перманентность распределительного закона и воспринимаемому учащимися, как нечто в достаточной мере естественное: умножить на $(+3)$ значит взять слагаемым 3 раза, а умножить на (-3) значит «взять вычитаемым» 3 раза. Недостаток такой формулировки заключается в том, что здесь опять теряется самостоятельность отрицательных чисел. Написав равенство $(+5) (-3) = -15$, приходится при этом истолковании подразумевать, что откуда-то придется вычитать 15, что не отвечает тому смыслу, который отрицательные числа имеют в большинстве приложений.

Резюмируя, мы можем сказать следующее: формальная мотивировка определений в строгом изложении недоступна учащимся на той ступени их развития, когда вводятся отрицательные числа; ее популярные варианты таят в себе ряд опасностей неправильного их восприятия учащимися — если эти варианты и можно частично использовать в преподавании, то лишь после тщательного обсуждения той формы, в которую они должны быть облечены и того места в преподавании, которое им следует отвести (см. § 6 и 7).

§ 5. КОНКРЕТНЫЙ СМЫСЛ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В конце § 3 мы привели основания, которые — во всяком случае частично — оправдывают введение отрицательных чисел с точки зрения внутренних, так сказать, целей и потребностей алгебры. При этом остается неясным, можно ли тут говорить о равноправности новой категории чисел с прежними, хотя бы с точки зрения приложений —

мнения различного рода величин и соотношений между ними. Не получится ли, быть может и не бесполезная, игра по определенным правилам с символами, которые сами по себе не имеют никакого отношения к действительности; ведь «не может же существовать ничего, что было бы меньше, чем ничто — отсутствие величины».

Совершенно очевидно, что для понимания смысла и значения отрицательных чисел выяснение этой стороны дела имеет неизмеримо более важное значение, чем проведенный выше формальный анализ. Те конкретные примеры приложений отрицательных чисел, которые при этом приходится иметь в виду, обычно и используются в преподавании при введении самого понятия об отрицательном числе, и это, конечно, играет решающую роль в процессе освоения учащимися новых для них, парадоксальных на первый взгляд, соотношений.

Надо однако, заметить, что в обычном изложении конкретной истолкование отрицательных чисел и их арифметическая теория не вполне согласованы между собой — примеры носят слишком частный характер и меняются от случая к случаю. Так, схема точек на числовой прямой хорошо иллюстрирует расположение чисел по величине, но при рассмотрении действий сложения и вычитания приходится переходить к направленным отрезкам, умножение которых для иллюстрации правила знаков лишено, однако, того прямого и ясного смысла, который свойственен операциям сложения и вычитания. Помимо этого, остается неясным, почему числа, на первый взгляд имеющие сравнительно ограниченную область применения (долг — имущество, шкала температур, направленные отрезки), претендуют на равноправие с положительными числами и вычисления с ними составляют неизменный атрибут всего дальнейшего формального аппарата алгебры. На этот вопрос мы уже частично ответили в конце § 3: мы еще вернемся к нему в § 6 и 7.

Нам придется поэтому сейчас с особой тщательностью анализировать применения отрицательных чисел к изучению конкретных величин. Как мы увидим, этот анализ приводит нас с несколько другой, и притом достаточно иной точки зрения, осветить и те вопросы мотивировки основных определений, которые мы рассмотрели с формальной точки зрения в § 3.

Начнем с обычных примеров. Наиболее обыденное применение отрицательных чисел (с которым, кстати сказать, не мешало бы знакомить детей уже в начальной школе) это—шкала температур. Наличие абсолютного нуля температуры было обнаружено значительно позже построения известных термометрических шкал; практически и сейчас в большинстве случаев можно температуру рассматривать, как величину, могущую изменяться в двух направлениях—в сторону повышения и в сторону понижения—без определенных крайних границ. В силу этого начало отсчета—температура, которой отвечает нулевая точка шкалы, остается—в известных пределах—произвольной. Введения отрицательных чисел для характеристики температур, которые ниже нуля, можно, конечно, избежать, как это часто делается в обыденной речи, применяя обороты «столько-то градусов ниже нуля, столько-то градусов холода, мороза» и т. п. Целесообразность обозначений— 1° — 2° и так далее, выясняется, по существу, лишь тогда когда мы начинаем производить действия над этими числами. Однако в преподавании можно использовать шкалу температур и до введения действий для того, чтобы наглядно пояснить расположение отрицательных и положительных чисел по величине. Если желать более теплые состояния вещества характеризовать большими числами, а более холодные—меньшими, то естественно располагать положительные и отрицательные числа по величине так же, как расположены отметки шкалы температур.

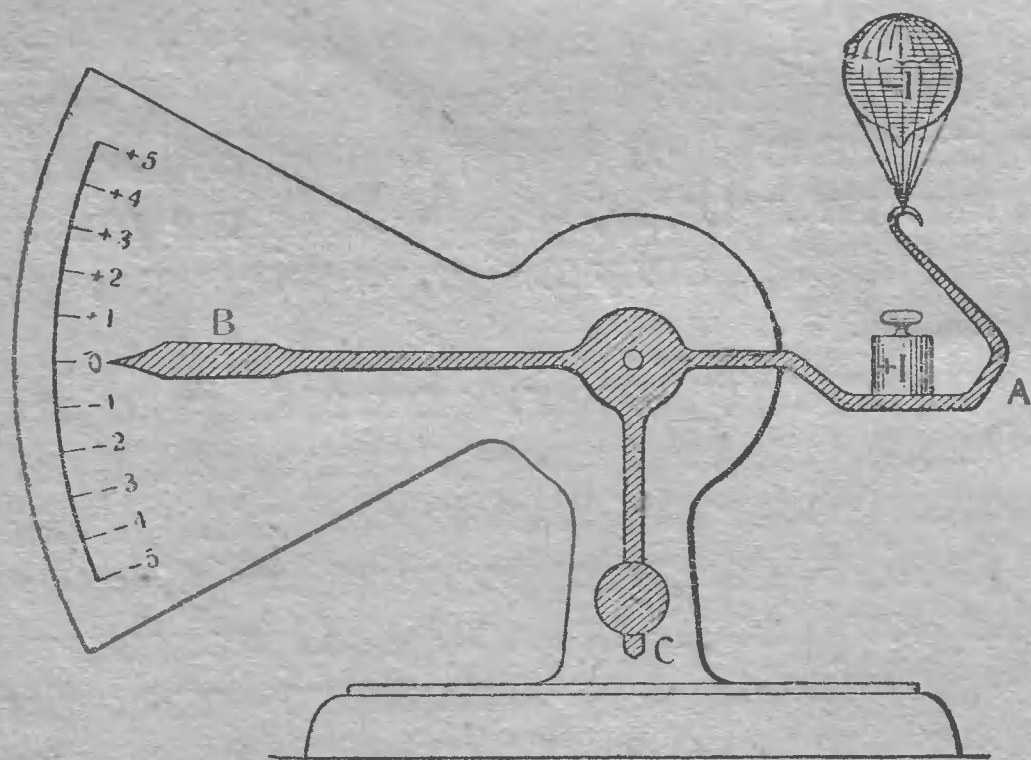
..., -3 , -2 , -1 , 0 , $+1$, $+2$, $+3$, ...

Однако наряду с такими примерами, в которых нуль отвечает произвольному началу отсчета (к их числу относятся и числовые прямая в ее обычном истолковании—«пункты направо и налево от станции» и ряд других), можно привести и такие примеры, в которых нуль имеет привычное для учащихся значение «отсутствия величины». Такие примеры психологически лучше отражают то обстоятельство, что обычный числовой ряд положительных чисел с помощью введения отрицательных чисел расширяется, получая естественное симметричное продолжение «по ту сторону нуля».

Сюда относится, прежде всего, классический пример «долг—имущество». И здесь, конечно, наличие этих двух слов позволяет характеризовать «имущественное состояние

ние» без отрицательных чисел — введение этих последних и здесь оправдывается возможностью производить над ними действия. Тем не менее, определение, согласно которому отрицательные числа меньше нуля и тем меньше, чем больше их абсолютная величина, здесь приобретает, пожалуй, наиболее осязаемую для учащихся форму: нетрудно, ведь, согласиться с тем, что наличие долга ухудшает имущественное состояние, так что естественно сказать, что (цитирую уже упомянутый на стр. 30 учебник) «когда кто ничего не имеет и даже еще 50 рублей должен, то он действительно имеет 50 рублями менее, нежели ничего. Ибо, ежели бы кто подарил ему 50 рублей на уплату долга, то и тогда бы он ничего не имел, хотя бы был богаче прежнего». И если, занимая у товарищей по работе деньги, я буду для памяти класть в кошелек бумажки с надписями «—3 руб.» «—4 руб.», то естественно сказать, что при наличии первой—я на 1 рубль богаче, чем при наличии второй: если бы мне удалось, например, разыскать в кошельке завалившуюся пятирублевку, то в первом случае у меня осталось бы в распоряжении 2 руб., а во втором—только рубль.

Второй пример несколько сложнее, но зато он допускает широкое использование в качестве наглядного пособия для иллюстрации действий над отрицательными числами. Представим себе «весы» следующей конструкции:



Черт. 2

Подчеркнем, что это—схематичные условные «весы»—в детали их конструкции нам вникать не к чему—

шкалу мы предположим нанесенной экспериментально—градуировкой с помощью гирек 1 г, 2 г и т. д. и не будем смущаться тем, что деления, быть может, получатся неравномерные.

Когда на чашке А ничего не лежит—стрелка В указывает на 0, когда лежит 1 г—стрелка подымается вверх и указывает на деление шкалы, отмеченное $+1$ и т. д. Теперь предположим, что на чашке не только ничего не лежит, но к ней прикреплен (см. черт. 2 на стр. 35) воздушный шарик, не только не оказывающий давления на чашку, но заставляющий ее подниматься и уравнивающийся гирькой в 1 г. При прикреплении такого шарика без гирьки стрелка опустится вниз и станет против деления (-1), при двух шариках—против деления (-2) и т. д. Естественно считать, что числа, отвечающие такого рода «отрицательным нагрузкам» чашки, следует, как это и сделано на шкале, располагать по другую сторону нуля в указанном порядке.

Если на чашке весов лежит положительная нагрузка (гирьки) a и отрицательная ($-b$) г (b шариков), то показание стрелки будет $(a - b)$, т. е. каждый шарик уменьшает нагрузку на 1 г, уравнивая гирьку в 1 г—можно, не изменяя положения стрелки, отцепить b шариков снявши одновременно столько же граммовых гирек. Уменьшать нагрузку можно, стало быть, либо снимая гирьки, либо прицепляя новые шарики. Но первым способом мы можем довести нагрузку только до нуля (если нет шариков), отвечающего положению, когда на чашке «ничего не лежит»,—прицепляя же шарики, мы можем пойти дальше, получая отрицательные нагрузки по ту сторону нуля.

Для учебных целей нет, конечно, надобности осуществлять реально такие весы—соответствующее наглядное пособие может состоять из подвижного коромысла с стрелкой и изображением «противовеса» С и из передвижных макетов гирек и шариков. Правильная установка стрелки (на нанесенных произвольно—хотя бы и неравномерно, но отмеченных числами делениях) при разных нагрузках, сама по себе представит полезное для учащихся упражнение.

Различие между схемами, отвечающими шкале температур и числовым отметкам на прямой, для которых н

...ая точка произвольна, с одной стороны, и схемами «сложение—имущество» и весов с гирями и шариками, с другой, — можно охарактеризовать, в общих чертах, так.

В первом случае положительные и отрицательные числа применяются как порядковые характеристики, в последнем им присущ и количественный смысл. Именно, если речь идет о температуре в $+3^\circ$, то неуместно было бы сказать, что она «состоит из температуры в 2° и температуры 1° »; здесь числовые отметки имеют порядковый смысл, такой же, как номера домов на улице. Поэтому и сложение их не имеет прямого смысла. Аналогично обстоит дело и при нумерации точек числовой прямой с помощью отрицательных и положительных чисел: этим устанавливается лишь положение каждой точки относительно выбранного начала, но сложение таких порядковых отметок не отвечает никакой допускающей прямое истолкование операции над соответствующими точками.

В отличие от этого, имущество « $+3$ р.» можно считать «состоящим» из $+2$ р. и $+1$ р. и, в более общем случае, из наличности 5 р. и 2 р. долга и т. д., точно так же, как нагрузка 3 г на чашку весов может складываться из нагрузки 2 г и 1 г или, в более общем случае, отвечать, например, совокупному действию на весы 5 г, положенных на чашку, и 2 прикрепленных шариков. Величины этого последнего рода, для которых сложение и разложение на слагаемые имеет объективный смысл, не зависящий от выбора начала отсчета, мы будем здесь для краткости называть аддитивными¹. (Читателя, интересующегося более подробным анализом этого понятия, мы позволим себе отослать к гл. III нашей книги «Теоретическая арифметика»).

Проведенному разграничению отвечает и различие в истолковании действий (сложения и вычитания). Формально сложение показаний термометра, конечно, осуществить можно—это и делается при определении средней температуры. Однако, если здесь легко истолковать значение получаемой, например, для двух слагаемых суммы, то промежуточный результат—сумма показаний—прямого конкретного смысла, попрежнему, не имеет.

Для того чтобы иметь возможность конкретно истолковать сложение, нам приходится от показаний термометра переходить к разностям температур, т. е. к

¹ От латинского слова, означающего «сложение».

характеристикам повышений и понижений температуры с помощью положительных и отрицательных чисел. Суммирование таких разностей отвечает подсчету конечного результата последовательных измерений температуры. Так равенство $(+3) + (-5) + (-2) = -4$ истолковывается здесь следующим образом: повышение температуры на 3° , последующее понижение на 5° и на 2° влечет за собой снижение температуры на 4° по сравнению с первоначальной.

Мы видим здесь, что характеристика изменения температуры, т. е. осуществляющихся в двух противоположных направлениях переходов от одной температуры к другой имеют уже количественный смысл в указанном выше смысле слова: изменение температуры величиной в $+3^\circ$ можно вполне осмысленным образом считать состоящим или складывающимся из трех последовательных изменений на 1° и т. п. Изменение температуры образует, таким образом, аддитивную величину в указанном выше смысле слова.

Но в силу того, что и самые температуры характеризуются положительными и отрицательными числами, здесь возможно сложение и неоднородных по своему смысловому значению чисел; так, равенство $3 + (-5) = -2$ может означать: понижение на 5° температуры в $+3^\circ$ приводит к температуре -2° .

Соответственно с этим и вычитание может иметь различный смысл. Разность двух температур служит, прежде всего, числовой характеристикой соответствующего изменения температуры. Так, равенство $(-3) - (-5) = +2$ означает, что переход от температуры -5° к температуре -3° есть повышение температуры на 2° . Но к тому же равенству мы придем и при решении задачи: сейчас -3° , сколько было час тому назад, если за это время температура понизилась на 5° , а также и при решении задачи: какое изменение температуры должно произойти после понижения ее на 5° для того, чтобы в итоге температура упала на 3° ? Такие задачи, конечно, решаются по соображению, а операция вычитания в этих примерах выступает в своем формальном аспекте, как действие, обратное сложению, что полностью выявляется при переходе к буквенной записи решения перечисленных задач. Но отчетливое представление о том, что изменение температуры, которое отвечает переходу от температуры b к температуре

выражается во всех случаях разностью $a - b$ и чрезвычайно важно для последующих приложений, и подобного рода примеры должны быть рассмотрены при всех возможных вариантах числового задания a и b .

Исно, что все сказанное относится и к точкам на прямой и соответствующим направленным отрезкам, характеризующим перемещение в положительном и отрицательном направлениях и образующим уже аддитивную величину. Сложение здесь иллюстрируется обычным образом: перемещение, приводящее к тому результату, что и последовательное производство нескольких данных перемещений подряд, называется суммой этих последних; относительно вычитания остаются в силе сделанные только что изменения.

Несколько иначе обстоит дело в случае аддитивных величин. Возвращаясь к схеме весов с гирьками и шариками, можем рассматривать прибавление положительного числа как увеличение числа гирек, а прибавление отрицательного числа, как присоединение соответствующего числа шариков, равносильное снятию такого же числа гирек (если они есть). В частности, совершенно очевидное истолкование получает соотношение $a + (-a) = 0$, именно, a гирек и a шариков взаимно уравниваются. Вычитанию положительного числа отвечает снятие гирек (это возможно, если гирьки лежат в достаточном количестве в чашке) или, что во всех случаях равносильно этому в смысле действия на показания стрелки—присоединение шариков, что возможно всегда. Вычитанию отрицательного числа отвечает снятие шариков (если прицеплено достаточное число их) или равносильное добавление гирек (что возможно всегда). Здесь иллюстрируется, таким образом, замена вычитания сложением и — в связи с этим — неограниченная выполнимость этого действия. Вычитание $a - b$, как сравнение нагрузок отвечает на вопрос: что нужно присоединить к нагрузке b , чтобы получить a ? Ответ в форме $a - b = a + (-b) = (-b) + a$ истолковывается так: присоединяя $(-b)$ к нагрузке b , мы уравниваем весы, остается еще присоединить a . Здесь самый смысл операции более сложный, чем в первом случае и соответственно с этим и истолкование общей формулы менее непосредственное.

Для учащихся, впервые знакомящихся с отрицательными числами, трудность заключается в объединении в

одном понятии «сложения» действий, которые — с точки зрения операций над положительными числами — сводятся в одних случаях к сложению, а в других — к вычитанию положительных чисел. При использовании схем направленных отрезков («перемещений», «векторов») эта трудность на наш взгляд, больше, чем при применении схемы «долг—имущество» или схемы гирь и шариков вот почему.

Если требуется решить задачу: «Совершены последовательные перемещения $+8$ км и -3 км, каким числом характеризуется результирующее перемещение?», то даже при такой, уже приспособленной к новым понятиям, формулировке вопроса, слишком ясно, что из 8 км надо вычесть 3 км, пройденные в обратном направлении. Обобщение, которое позволяет это действие назвать сложением, требует от учащегося осознания обобщенного понятия «перемещения», скажем «вправо», которое характеризуется положительным числом, если оно действительно отвечает движению вправо, и отрицательным, если оно отвечает фактическому движению влево. Далее, последовательное производство таких перемещений с трудом воспринимается учащимися, как «сложение перемещений», потому, что в результате исчезают всякие следы того, из каких перемещений данное перемещение составлено, как из слагаемых.

Иначе обстоит дело с величинами в схемах «долг—имущество» и «гирь и шариков». Самая смысловая неравноправность положительных и отрицательных значений величины (положительные числа употреблены в привычном смысле, в каком они употреблялись и раньше) облегчает здесь восприятие долга, как «отрицательного имущества» и воздушного шарика, как «отрицательной нагрузки». Во-вторых — и это не менее важно — всякое имущественное состояние, как и всякая нагрузка весом, складывается в каждом конкретном случае из определенного имущества и определенного долга, из определенной положительной и определенной отрицательной нагрузки. Для схемы «долг—имущество» это становится особенно наглядным, если представить себе кошелек, в котором наряду с деньгами (монетами, банкнотами) содержатся бумажки с надписями — 3 р., — 1 р. и т. д., положенные туда скажем, для памяти и обозначающие наличие соответственного долга. Конкретные представления об этой «со-

ставленности» нисколько не нарушаются от того, что один и тот же итог $[+2 = (+4) + (-2) = +3 + (-1)]$ может отвечать различным комбинациям имущества и долга, одно и то же положение стрелки весов — различным распределениям положительной и отрицательной нагрузки. «Результирующее перемещение» не несет с собой никаких указаний на то, из каких «составляющих перемещений» оно получено, но всякое показание стрелки весов отвечает какой-то комбинации положенных на весы гири и прикрепленных шариков: без представления о такой комбинации теряет содержание и представление о «показании стрелки». Поэтому и истолкование вычитания отрицательного числа как отнятия («изъятия из суммы») соответствующего слагаемого приобретает столь же простой и очевидный смысл, как и знакомое учащимся «отнятие положительных единиц. Так, «отнимая» от суммы $(+2) = (+3) + (-6) + (+5)$ отрицательное слагаемое (-6) , мы очевидно, увеличим результат на 6 единиц, получив $(+3) + (+5) = +8$. Таким образом $(+2) - (-6) = (+2) + (+6) = +8$.

Оставляя в стороне случай порядковых характеристик (отметки шкалы температур, числовые отметки для точек прямой), мы можем сказать, что для аддитивных величин всех рассмотренных типов (положительных и отрицательных нагрузок чашки весов, имущества и долга, направленных отрезков на прямой и т. п.), целесообразность введения отрицательных чисел и установленных для них законов действий обусловлена следующим обстоятельством. Для всех них можно определить операцию сложения так, что каждому значению величина a будет отвечать некоторое «противоположное» значение a' , в сумме с a дающее нуль $a + a' = 0$.

Принимая некоторое значение e такой величины за единицу $(+1)$, естественно характеризовать противоположное значение e' числом (-1) , сумму $e' + e$ — числом (-2) и т. д.

Наличие таких величин как раз и обуславливает целесообразность, с точки зрения конкретных приложений, соответствующего расширения числовой области. Принятые определения расположения и действий над отрицательными числами находят свое оправдание (а с исторической точки зрения — свою отправную точку) в свойствах таких «направленных величин». Для этих величин опера-

ция вычитания оказывается всегда выполнимой, и в этом — основа формальной мотивировки «введения новых чисел в качестве решений уравнения $x + b = a$ при $b > a$ ». Действительно, при изучении направленных величин такие уравнения могут встречаться столь же часто при $b > a$, сколь и при $b < a$, и их решение может иметь смысл прямого или косвенного ответа на поставленный в задаче вопрос.

§ 6. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА КАК ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕНЕНИЙ ВЕЛИЧИН

Приведенными в § 5 примерами возможные конкретные приложения отрицательных чисел не исчерпываются; наоборот, эти примеры можно в известной мере трактовать, как сравнительно частные случаи. Именно, отрицательные числа могут применяться и при изучении таких аддитивных величин, которые сами по себе не могут иметь отрицательных значений: дело в том, что изменение любой величины в общем случае может иметь два противоположных направления (в сторону возрастания и убывания). Каждому изменению в одну сторону отвечает противоположное ему изменение в другую сторону, причем последовательное осуществление двух таких изменений возвращает величину к ее исходному значению. Можно, поэтому, сказать, что эти изменения сами образуют «направленную аддитивную величину», для характеристики значений которой естественно ввести отрицательные числа и говорить о положительных и отрицательных «приращениях».

Так, говоря о массе или весе тела или о посевной площади, занятой той или иной культурой, т. е. о величинах, которые могут принимать только положительные или нулевые значения, мы все же можем при возрастании этих величин говорить о положительных, при убывании — об отрицательных приращениях. Правда, при данном начальном (или — во многих случаях — «среднем», с которым сравниваются остальные) значении не всякое отрицательное приращение возможно, но это не мешает нам, отвлекаясь от величины начального значения, построить все же исчисление положительных и отрицательных приращений (например, в предположении, что начальное значение достаточно велико для того, чтобы все рассматриваемые отрицательные приращения были осуществимы).

Аналогично этому, имея в распоряжении только натуральный ряд чисел

1, 2, 3, 4, 5, ...

Вводя в рассмотрение два противоположных направления перехода от одного члена этого ряда к другому, мы можем естественным образом ввести отрицательные числа для характеристики переходов от больших чисел к меньшим (отрицательных приращений). На этом, по существу, и основана возможность арифметической теории отрицательных чисел, как пар положительных чисел (стр. 25—26).

Легко видеть, что такая интерпретация близка с упомянутым нами уже на стр. 29 истолкованием отрицательных чисел, как вычитаемых: присоединение знака действия к числу позволяет здесь всегда говорить о «приращениях» (зато—положительных и отрицательных) и о «сложении приращений», как о последовательном осуществлении соответствующих изменений. При этом в этой новой области операция сложения приращений объединяет в одно любую последовательность действий сложения и вычитания, с правом производить действия в любом порядке, применяя сочетательный и переместительный закон, заключение в скобки и раскрытие скобок и т. д., без каких-либо ограничений в отношении величины рассматриваемых чисел.

С другой стороны, так как приращения представляют собой как раз разности двух значений величины, это исчисление приращений отвечает упомянутой на стр. 25 формальной теории отрицательных чисел, при которой эти последние вводятся, как разности $a - b$ при $a > b$. Мы видим, таким образом, что потребность ввести в рассмотрение такие разности обусловлена не только формальными соображениями, но также и необходимостью построить аппарат исчисления двусторонних изменений величин (приращений).

Под эту концепцию можно подвести и рассмотренные выше случаи, например, характеристику температур. Принимая произвольную начальную температуру за нулевую и отсчитывая от нее положительные и отрицательные приращения, мы можем все остальные температуры охарактеризовать с помощью этих приращений, устанавливая этим скалярное расположение всех температур по отношению в выбранной начальной. Первоначальные количе-

ственные характеристики приращений (и изменения температуры) превращаются при этом в порядковые характеристики температурных состояний. Этому аналогично и построение координат точек на прямой. Вводя сначала отрицательные числа для характеристики направленных отрезков и откладывая эти отрезки от произвольной, выбранной в качестве начала, точки прямой, мы можем отнести те же числа в качестве координат тем точкам, с которыми совпадают концы этих отрезков.

Не подлежит сомнению, что при изучении отрицательных чисел в школе необходимо с самого начала ознакомить учащихся с теми, различными по своему смыслу, но постоянно встречающимися на практике конкретными применениями отрицательных чисел, о которых мы подробнее говорили выше. Сюда относится и обычная схема долг — имущество, к которой мы рекомендовали бы присоединить и «весы с шариками», а также и характеристики температур и изменений температуры. Это обычно, в той или иной форме, и делается. Однако последнее истолкование, о котором мы только что говорили (характеристика приращений), несмотря на высокую степень общности и ясно выраженную арифметическую природу, обычно оставляется в тени. Между тем именно это истолкование может быть с большим успехом использовано в методических целях.

Приведем примерную схему ознакомления учащихся с этим истолкованием; оно настолько элементарно, что в принципе могло бы быть доступно детям еще задолго до начала систематического курса алгебры.

Вообразим большой склад, из которого увозят и куда привозят мешки с грузом. Запись последовательных операций дана в левом столбце таблицы на стр. 45.

Но если нет надобности подводить итог каждый раз, то можно оставить только второй столбец, указывающий отдельные операции и к концу дня из суммы чисел, перед которыми стоит знак $+$, вычесть сумму чисел, перед которыми стоит знак « $-$ » (или наоборот, в зависимости от того, какая сумма больше), и результат прибавить к начальному количеству 2728 (или вычесть от него). Это — совершенно естественный переход к сложению чисел одинаковых знаков и — в конце дня — также и разных знаков.

Во втором столбце числа со знаками $+$ и $-$ перед ними выступают, как характеристики противополож-

1	2	3	4
	Опера- ция	Результат последова- тельных операций	Состоян. склада
2728 + 2	+ 2		+ 2
2730 + 18	+ 18	$+ 2 + (+ 18) = + 20$	+ 20
2748 — 5	— 5	$+ 20 + (— 5) = + 15$	+ 15
2743 — 23	— 23	$(+ 15) + (— 23) = — 8$	— 8
2721 — 4	— 4	$— 8 + (— 4) = — 12$	— 12
2716 + 12	+ 12	$(— 12) + (+ 12) = 0$	0
2728 — 3	— 3	$0 + (— 3) = — 3$	— 3
2725			

ных действий (привезти, увезти) или, что то же, как характеристики изменений рассматриваемой величины (количества мешков на складе), причем увеличение характеризуется знаком $+$, а уменьшение знаком $-$.

Видоизменим теперь постановку вопроса. Пусть, сверх того (контора требует!) нужно иметь числовую характеристику состояния склада в каждый момент (по сравнению с первоначальным). Тогда естественно последовательно подводить итог так, как это сделано в третьем столбце, вводя кстатн скобочные обозначения для знаков операций и обозначая знаком $+$ между скобками последовательное выполнение их. Так, запись

$$(+20) + (-5) = +15$$

будет означать: увеличение числа мешков на 20 и уменьшение затем на 5 приводит в итоге к увеличению числа мешков на 15 по сравнению с первоначальным. Состояние склада после первых трех операций характеризуется, следовательно, числом $+15$ (на складе на 15 мешков больше, чем было вначале). Следующее действие

$$(+15) + (-23) = -8$$

истолковывается так: к началу четвертой операции было констатировано увеличение на 15 мешков по сравнению с первоначальным количеством, потом увезли 23 мешка, в итоге на складе станет на 8 мешков меньше, чем первоначально. Состояние склада после четвертой операции характеризуется числом (-8) ; если понадобится знать, каково действительное число мешков в этот момент, то придется только написать $2728 - 8 = 2720$.

Положительные и отрицательные числа (и нуль), получающиеся в результате и выписанные в четвертом столбце, характеризуют, таким образом, состояние склада относительно выбранного начального состояния (аналогично отметкам температурной шкалы и координатам точек на прямой).

Если желать по числам четвертого столбца судить о том, в каких случаях количество мешков на складе больше, а в каких — меньше, то мы заметим, что отметка (-3) отвечает меньшему фактическому количеству, чем отметка (-2) ; обе они — меньшему, чем количество, характеризующее числом 0 в четвертом столбце (обозначающем отсутствие изменения по сравнению с первоначальным количеством), и все перечисленные отметки отвечают фактическим количествам мешков, меньшим, чем те, которые характеризуются отметками $(+1)$, $(+2)$ и т. д.

Это приводит естественным образом к расположению положительных и отрицательных чисел по величине в обычном порядке

. . . , -3 , -2 , -1 , 0 , $+1$, $+2$, $+3$, . . .

При этом сравнение состояний (определение того, на сколько в одном состоянии, отвечающем отметке a в четвертом столбце, число мешков на складе больше, чем в другом состоянии с отметкой b) может быть осуществлено с помощью операции вычитания. Действительно, вопрос равносильен следующему. Сколько (x) надо привезти при состоянии b , чтобы получить состояние a ? Слово „привезти“ употреблено здесь в обобщенном смысле слова — фраза „привезти (-3) мешка“ равносильна фразе „увезти 3 мешка“. Точнее было бы сказать: какому изменению надо подвергнуть b , чтобы получить a ? или, что то же: какова та операция x , выполнение

которой перевело бы состояние b в состояние a :

$$b + x = a.$$

Для ответа на вопрос надо, следовательно, найти неизвестное слагаемое x в этой сумме, что во всех случаях, согласно общему определению вычитания, записывается так:

$$x = a - b.$$

В конкретных случаях x следует искать по соображению и сейчас же проверять. Начать, конечно, лучше с положительных характеристик и случая $a > b$. Но затем, поставив вопрос о сравнении состояний $a = +2$ и $b = +4$, мы получим вопрос

$$(+4) + x = +2.$$

Ответ ясен: надо было бы увезти 2 мешка, чтобы перейти от состояния $+4$ к состоянию $+2$, т. е. $x = -2 = (+2) - (+4)$. Аналогично, при $a = -8$ и $b = -12$ запись $-12 + x = -8$ и ответ $x = +4 = (-8) - (-12)$ означает, что нужно еще привезти 4 мешка, чтобы вместо записи -12 в четвертом столбце получить -8 . Этому отвечает суждение о величине: число -8 характеризует состояние, при котором число мешков на складе на 4 больше, чем в состоянии -12 и более короткое суждение о числе: «Число -8 на 4 единицы больше числа -12 ».

Действие вычитания выступает здесь, как разностное сравнение чисел, отвечающее на вопрос: на сколько первое число больше или меньше второго, аналогично тому, как действие нахождения отношения двух чисел отвечает на вопрос: во сколько раз первое число больше второго или какую часть второго числа оно составляет? В этих, с формальной точки зрения не безупречных, формулировках согласование ответа с двумя частями вопроса определяется формой ответа (положительное или отрицательное число в результате вычитания, целое число или дробь в результате деления) и производится по соображению. Если быть педантичным, то надо слова «или меньше» отбросить и истолковывать отрицательный результат в ответе после того как он получен. Но тогда придать конкретный общий смысл операции вычитания можно, только следуя примеру по намеченному нами выше пути.

Однако интерпретация действия вычитания, как разностного сравнения, обязательно требующая специального

внимания со стороны преподавателя на той или иной стадии прохождения курса, является менее непосредственной, нежели обычное арифметическое истолкование этого действия, как отнятия некоторого числа единиц. Поэтому в начальной стадии ознакомления учащихся с действиями над отрицательными числами целесообразно обобщить именно это, более примитивное и конкретное, смысловое значение рассматриваемой операции, как отнятия от суммы двух слагаемых одного из входящих в нее слагаемых для получения другого («погашение» слагаемого). Этот смысл действия вычитания без труда переносится в нашей схеме и на отрицательные числа и более удобен для пояснения правил производства этого действия. К этому можно подойти, например, так:

Представим себе, что после сведения одного из итогов третьего столбца, например, второго, оказалось, что операция $+18$ на деле не состоялась. Тогда правильный итог (сумма $+15$ без слагаемого $+18$) будет, очевидно,

$$+15 - (+18) = -3.$$

Если бы вместо этого предположить, что не состоялась третья операция (-5) , то правильный итог [сумма $+15$ без слагаемого (-5)] был бы

$$+15 - (-5) = +20.$$

Если бы то же обстоятельство было обнаружено только после четвертой операции, то мы внесли бы поправку $-(-5)$ в сумму -8 и получили бы

$$-8 - (-5) = -3 \text{ и т. п.}$$

Правило, согласно которому вычитание (погашение) слагаемого с положительным знаком влечет уменьшение, а вычитание (погашение) слагаемого с отрицательным знаком — увеличение на соответствующее число единиц, имеет здесь совершенно отчетливый арифметический смысл.

От такта преподавателя зависит порядок изложения и место в нем приведенных схем (схема весов с шариками, схема склада), для которых легко изготовить нужные наглядные пособия (макет весов, изображение склада), ограничившись, в крайнем случае, соответствующими схематическими изображениями на доске. Можно начинать с этих примеров и потом формулировать основные определения, касающиеся расположения отрицательных чисел и производства над ними действий сложения и вычитания, можно

рассматривать их параллельно или даже после установления основных определений. Отметим здесь, что в учебнике алгебры Александрова и Колмогорова отрицательные числа с самого начала вводятся, как характеристики изменений величин. Дополнив это в нужный момент указанием на возможность характеризовать отрицательными и положительными числами значения величины («состояния»), мы получим уже достаточно общую схему, в которую укладываются все обычные приложения.

Приведем в заключение пример применения отрицательных чисел для подсчета долга и имущества, в котором практичность такого способа подсчета выступает особенно ярко. Предположим, что компания из четырех лиц A , B , V и Γ (скажем, при совместном путешествии) желает вести запись расходов, которые могут производиться каждым из участников и одновременно учитывать задолженность, возникающую при этом у остальных.

Такой учет можно вести с помощью таблицы из четырех граф

А	Б	В	Г

(столбцов), записывая со знаком «+» в каждую графу произведенный соответствующим лицом расход и занося одновременно со знаком «—» в графы всех участников падающую на них долю долга. Записывать, кому именно причитается долг, при этом не нужно. Для окончательного расчета сводятся итоги каждого столбца. В сумме эти итоги должны дать нуль; лица, в графе которых итог отрицательный, уплачивают соответствующую сумму, распределяемую между теми участниками, итог в графе которых положительный.

Так, если A заплатил за билеты для всех 80 р., B заплатил за обед B , V и Γ 30 р., V заплатил за арбуз, которого сам не ел, 6 р., B и Γ заплатили по 20 р. каждый за ночлег всех четырех, Γ дал 3 р., B и заплатил поровну за себя и за B 4 р. на почте, то запись будет иметь вид:

	А	Б	В	Г
Билеты	+ 80 — 20	— 20	— 20	— 20
Обед		+ 30 — 10	— 10	— 10
Арбуз	— 2	— 2	+ 6	— 2
Ночлег	— 10	+ 20 — 10	— 10	+ 20 — 10
Почта		— 2	— 3	+ 3 + 4 — 2
Итого	+ 48	+ 6	— 37	— 17

Итак, V должен 37, а Γ — 17 рублей. Из этих 54 рублей 48 должен получить A , а остальные 6 должен получить B .

§ 7. КОНКРЕТНОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ПРАВИЛА ЗНАКОВ ПРИ УМНОЖЕНИИ ЧИСЕЛ

Перейдем теперь к более трудному с методической точки зрения вопросу — к опирающейся на конкретные представления мотивировке правила знаков, устанавливаемого при определении умножения отрицательных чисел. Трудность здесь вот в чем. Во всех приведенных выше истолкованиях отрицательные числа выступают, если можно так выразиться, как числа именованные. Действительно, мы говорим о 3 р. долгу, об отрицательной нагрузке -3 г, о температуре -3° , о направленном отрезке в -3 единицы длины, об отрицательном приращении -3 (каких-то конкретных единиц). Ясно, что ни одно из этих представлений не может служить для целей конкретного истолкования отрицательного множителя, так как этот последний, по самому смыслу своему, есть число отвлеченное (иллюстрация стр. 30, где речь идет об отрицательной площади, носит слишком частный и условный характер: это становится очевидным, если учесть все многообразие интерпретаций действий сложения и вычитания отрицательных чисел в только что упомянутых случаях). С подобным же положением вещей мы сталкиваемся и в арифметике, когда речь заходит об умножении на дробь: при сравнении дробей, сложении и вычитании их, символ дроби $\frac{m}{n}$ истолковывается, как сумма m слагаемых, каждое из которых есть $\frac{1}{n}$ -я часть некоторой конкретной единицы; истолкование действия умножения, естественно, не может опираться на постоянно ассоциируемый учащимися с дробью смысл именованного числа ($\frac{1}{2}$ см, $\frac{2}{3}$ яблока, $\frac{3}{10}$ кг и т. д.) и поэтому обычно это действие с большим трудом и чисто внешним образом усваивается учащимися. При всем том, как известно, и умножение на дробь и умножение на отрицательное число встречаются в конкретных задачах, и, следовательно, могут быть конкретизированы в той же мере, как и умножение на целое положительное число.

Проследим за тем, какой смысл придается числу в роли множителя, начиная с умножения натуральных чисел. Мы будем, в отличие от принятого порядка записи, писать множитель на первом месте (так, как обычно

ишется коэффициент). Умножить некоторое число a , например, на 3, значит взять это число три раза слагаемым:

$$3a = a + a + a.$$

Множитель 3 выступает здесь в роли характеристики действия, которое нужно совершить над числом (или над какой-нибудь величиной, например, отрезком) a , чтобы получить произведение $3a$. Отвлеченный смысл числа 3 проявляется в речи в том, что оно не снабжается наименованием, а употребляется в соединении со словом «раз» или окончанием «-жды», подчеркивающими указанное смысловое значение множителя 3. Для того чтобы оттенить это обстоятельство мы будем говорить, что число 3 выступает здесь, как «оператор» — знак операции или действия. Целые числа, как операторы, могут вступать во взаимодействие друг с другом. Так, если результат умножения числа a на 3 надо умножить потом еще на 5, то мы можем записать

$$5(3a) = 5 \cdot 3a = 15a.$$

В операторном истолковании равенство $5 \cdot 3 = 15$ будет означать: «утроение» какого-либо числа или величины и последующее «упятерение» результата может быть заменено увеличением исходного числа или величины в 15 раз.

В конкретных задачах операторы-множители порождаются обычно не той величиной, над которой надо произвести соответствующие действия, а некоторой другой, с ней связанной. Переход от характеристики значения этой последней к отвлеченному операторному смыслу соответствующего числа представляет известный источник затруднений при записи действий с числами, снабженными наименованиями в процессе начального обучения — дети инстинктивно предпочитают либо вовсе не писать наименований в записи действия, что по существу и правильно (действия производятся над числами), либо же сохраняют наименование и для множителя (что близко к общепринятому в физике способу обращения с размерными величинами). Так, уже в простейших задачах: «в каждой из 5 корзин по 3 яблока, сколько всего?» оператор 5 первоначально обозначает число корзин (вторая величина из числа двух, участвующих в задаче); аналогично в задаче: «1 кг стоит 3 р., сколько стоят 5 кг?» оператор 5 порождается второй величиной — числом килограмм, находя-

щейся в прямой пропорциональной зависимости с искомой стоимостью продукта. Обычные требования о постановке наименований в записи действий как раз и обусловлены стремлением вызвать и закрепить у детей отчетливые представления об отвечающих решению задачи *операциях над* соответствующими конкретными *величинами*. При этом автоматически выявляется роль отвлеченного числа — множителя, как оператора, действующего на то или иное значение величины, выраженной числом, снабженным соответствующим наименованием.

Если же стремиться оставаться в рамках *одной* только величины, то — несколько искусственно — можно во всех этих случаях связать вопрос с *переменной единицы измерения*. В первом примере число 5 — результат измерения количества яблок корзинами по 3: яблока в каждой и требуется найти результат измерения того же количества, когда за единицу принято одно яблоко; во втором примере от измерения стоимости стоимостью одного кг требуется перейти к измерению стоимости в рублях.

Аналогично этому обстоит дело и в случае, когда речь идет об умножении на дробь. Если в последнем примере (1 кг стоит 3 р.) потребуется найти стоимость не 5, а $5\frac{1}{2}$ кг, то надо будет взять $5\frac{1}{2}$ раз по 3 р., т. е. произвести умножение

$$5\frac{1}{2} \cdot 3 = 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 16\frac{1}{2},$$

где оператор $5\frac{1}{2}$ означает, что над числом 3 производятся действия: упятерения и деления пополам и полученные результаты складываются (берется пять с половиной троек). Точно так же, равенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ читается: половина одной трети равна одной шестой и т. д.

Отвлеченное число (множитель-оператор) выступает во всех этих случаях в той роли, которая ему отведена известной формулировкой Ньютона: «Число есть не столько собрание единиц, сколько отношение одной величины к другой, принятой за единицу меры». При этом следует иметь в виду, что выражая отношение числом-оператором, мы даем прямой ответ на вопрос: как из исходной, принятой за единицу меры, величины получить требуемую, применяя действия деления на равные части и объединение нескольких таких частей в одну сумму. Нельзя переоценить важность того, чтобы этот смысл понятия «отношение»

учащиеся отчетливо чувствовали, и могли, например, равенство $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ всегда прочесть так: „ a есть $\frac{m}{n}$ - ых b “.

Перейдем теперь к направленным величинам. Если для величин существенно положительных отношение любых двух соизмеримых значений выражается некоторым целым числом с дробью, так что положительных рациональных дробей достаточно для того, чтобы указать операцию, переводящую любое значение величины в любое другое, то для направленных величин этих чисел уже мало. Действительно, так как значения таких величин могут еще дополнительно отличаться по направлению (или, как удобнее для краткости говорить, отличаться знаком), то числа — операторы, переводящие одно значение в другое должны включать в себя указание на то, нужно ли переменить знак или же он сохраняется прежний.

Естественно, поэтому, ввести в качестве операторов и отрицательные числа, принимая по определению, что применение такого оператора сопряжено, помимо всего прочего, с переменной знака (направления) той величины, к которой он применяется.

Если воспользоваться схемой направленных отрезков, то оператор (-3) , примененный к отрезку a , будет означать утроение этого отрезка с переходом к направлению, противоположному направлению отрезка a . Если, поэтому, $a = +5$, то

$$(-3)a = (-3)(+5) = -15,$$

если же $a = -5$, то

$$(-3)a = (-3)(-5) = +15.$$

Правило знаков получает в этом истолковании общий смысл: двукратная перемена направления (и, вообще, последовательная перемена направления четное число раз) возвращает нас к первоначальному (исходному) направлению; перемена направления один или последовательно нечетное число раз приводит нас к направлению, противоположному исходному.

И здесь операторы могут вступать во взаимодействие друг с другом; так, равенство $(-3)(-5) = +15$ можно, истолковывая оба множителя, как операторы, прочесть так: умножение какой-либо величины с переменной ее направле-

ния и последующее утроение с переменной направлением равносильно увеличению первоначального значения в 15 раз (по абсолютной величине) без перемены направления.

Если обратиться к задачам, которые обычно используются для иллюстрации правила знаков, то мы увидим, что в них участвуют две направленных величины, причем одна из них порождает оператор (снабженный знаком), которым при решении задачи надо воздействовать на значение другой, в полной аналогии с тем, что мы установили выше для простейших арифметических задач.

Пример. „Скорость поезда v км в час; где он находится в момент t часов, если в 0 часов он прошел мимо станции А?“. Здесь предполагается, что на линии установлено положительное направление и скорость v определяется соответственно со знаком, так же как и время с обычным соглашением о знаке t . Мы будем истолковывать здесь скорость v как направленный отрезок пути, проходимый поездом в единицу времени. Ответ — „поезд будет находиться на расстоянии $s = vt$ от станции А“ основан на применении оператора t к отрезку пути v . Если, например, $t = 3\frac{1}{2}$, то обычное рассуждение таково: за час поезд проходит v км, следовательно, за $3\frac{1}{2}$ часа пройдет $3\frac{1}{2}v$. Взяв $t = 3\frac{1}{2}$ мы найдем по смыслу задачи, что у найденного умножением на $3\frac{1}{2}$ расстояния $3\frac{1}{2}v$ придется еще изменить знак, так как вопрос поставлен о том, где поезд был за $3\frac{1}{2}$ часа до прохода мимо станции А. Если при этом v выражается отрицательным числом, например, $v = -30$, то ясно, что $s = -(-3\frac{1}{2}) = +105$, так как поезд двигался в отрицательном направлении.

Совершенно аналогичная, но может быть, менее избитая по тематике задача. Будем считать положительным вращение головки винта (или ручки штопора) по часовой стрелке (слева направо), если смотреть от головки вдоль оси винта. Будем, далее, считать положительным направление перемещения самого винта вдоль его оси в сторону „ввинчивания“ (от головки к острию).

Здесь две направленных величины; угол поворота головки θ (отрицательный при вращении против часовой стрелки) и путь погружения винта σ (отрицательный при вывинчивании винта из гнезда). Скорости предыдущей задачи соответствует здесь постоянная хода винта v , которую мы определим, как расстояние (со знаком), которое проходит винт при повороте на $\theta = +1$ (на 1° или лучше, на один полный оборот в направлении часовой стрелки). Положительные значения v отвечают винтам „правой нарезки“ (как обычный штопор), отрицательные — винтам „левой нарезки“ (погружающимся при вращении против часовой стрелки).

Расстояние σ , проходимое винтом при θ полных оборотах при всяких знаках v и θ дается формулой

$$\sigma = \theta \cdot v.$$

Так, если $v = +3$ и $\theta = -5$, то $\sigma = (-5)(+3) = -15$, а если $v = -3$, то $\sigma = (-5)(-3) = +15$. Действительно, при левом вращении винт правой нарезки будет вывинчиваться, а винт левой нарезки — погружаться. Значения θ здесь играют роль операторов, с помощью которых из основного расстояния v получаются расстояния, проходимые винтом в направлении оси при соответствующем вращении.

В этих примерах отрицательные значения обеих величин даются уже в готовом, так сказать, виде. Но нетрудно составить задачи, в которых отрицательные сомножители появились бы, как разности положительных значений величин. Такова задача: „Поезда P_1 и P_2 , двигающиеся со скоростями v_1 и v_2 , встречаются в момент t_1 . На каком расстоянии (и в каком направлении по линии) находится поезд P_2 от поезда P_1 в момент t_2 ?“.

Предполагая, что $t_2 > t_1 > 0$ и $v_2 > v_1 > 0$ мы получим с помощью обычного арифметического рассуждения ответ

$$s = (v_2 - v_1) (t_2 - t_1).$$

Будем для простоты положительное направление на линии обозначать словом „вправо“. В силу того, что разность между значениями двух направленных величин характеризует величину (со знаком) „перехода“ от второй величины к первой, разность расстояний v_2 и v_1 , на которые за час отойдут поезда от места встречи, будет представлять по величине и по знаку расстояние от P_1 до P_2 . На отрезок $v_2 - v_1$ изменяется, далее, в силу равномерности движения поездов, расстояние между P_1 и P_2 за каждый час времени. С другой стороны, $t_2 - t_1$ выражает и при $t_1 < t_2$ и при $t_2 < t_1$ направленную величину отрезка времени от момента t_1 до момента t_2 ; эта разность отрицательная, если вопрос идет о расположении поездов до момента встречи. Ясно, что применение оператора $t_2 - t_1$ к величине $v_2 - v_1$ во всех случаях дает ответ на вопрос о расположении P_2 по отношению к P_1 в момент t_2 . Если, например, $v_2 - v_1 = v > 0$, но $t_2 - t_1 = -t < 0$, то очевидно, что поезд P_2 , удаляющийся после встречи на v км в час „вправо“ от поезда P_1 , за t часов до встречи должен был находиться на расстоянии $-tv$ от P_1 , то есть на расстоянии tv „влево“ от P_1 . Если же $v_2 - v_1 = -v < 0$ и $t_2 - t_1 = -\tau < 0$, то поезд P_2 , удаляющийся после встречи на v км в час „влево“ от P_1 должен был за τ часов до встречи находиться на расстоянии $v\tau$ „вправо“ от P_1 в соответствии с формулой

$$s = (v_2 - v_1) (t_2 - t_1) = (-v) (-\tau) = v\tau.$$

Разбор всех случаев здесь уже несколько утомителен, однако, упражнения подобного рода представляют собой неизбежный этап на пути усвоения учащимися смысла отрицательных чисел в общих формулах и, в частности, смысла отрицательных решений уравнений.

Обычно проводимая мотивировка правила знаков (как и, вообще, обобщения определений действий): „При этом однотипные задачи решаются одним и тем же действием, по одним и тем же алгебраическим формулам“ достаточно отчетливо выражает фактическое положение вещей, однако, носит скорее характер констатации факта. Суть же дела — в применении к разобранным только что примерам — заключается в том, что параллелизм в действиях над двумя находящимися в прямой пропорциональной зависимости величинами „с увеличением значения одной и значение другой увеличивается во столько же раз“) распространяется

здесь не только на действия сложения и разбиения на части, выражаемые обычными дробными операторами — множителями, но и на операцию перемены направления (знака) двух связанных между собою величин с изменением направления одной соответствующее значение другой также меняет направление на противоположное. Если, поэтому, значение $s_0 = v$ одной из этих величин, „приходится на единицу“ другой, то есть отвечает значению $t_0 = +1$, то для определения значения s , отвечающего произвольному значению t , можно применить к значению s_0 оператор (со знаком), описывающий способ получения значения t из значения $t_0 = +1$, т. е. написать

$$s = t s_0 = t v.$$

Уже самая формулировка указанной связи, которая может быть записана и в виде пропорции

$$\frac{s}{s_0} = \frac{t}{t_0},$$

обе части которой должны быть равны по величине и по знаку, напоминает общее определение умножения Коши, о котором мы говорили на стр. 31. Это определение, как мы видим, имеет по существу, операторный смысл.

Остановимся еще на перемене единицы меры, о которой мы упоминали выше (стр. 52).

Если при единице меры $e = +1$ значения направленной величины выражаются числами

$$\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots,$$

то при переходе к единице меры e_1 мы должны будем изменить эти числа. Как? Операторное истолкование непосредственно дает ответ на вопрос. Если величина a выражалась числом α при единице меры e , то это значит, что a получается из e применением оператора α , т. е. $a = \alpha e$. Пусть теперь известно отношение старой единицы меры к новой

$$e : e_1 = \mu,$$

где μ может быть и отрицательным числом. Это означает, что e получается из e_1 применением оператора μ , т. е. $e = \mu e_1$. Но тогда a получится из e_1 последовательным применением операторов μ и α , т. е.

$$a = \alpha e = \alpha(\mu e_1) = (\alpha\mu)e_1.$$

Последние скобки мы вправе поставить потому, что умножение $\alpha \mu$ во всех случаях определено так, что число $\alpha \cdot \mu$ выражает действие, равносильное последовательному производству операций α и μ . Таким образом все числа, измеряющие значения данной величины при переходе к новой единице меры умножаются на число μ . Ясно, например, что принимая за e_1 вдвое меньшую величину противоположного по отношению к e направления, мы будем иметь $e = -3e_1$ и значения величины, характеризовавшиеся числами

$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots$,

будут в новой единице меры характеризоваться „пропорциональными“ им числами

$\dots +15, +12, +9, +6, +3, 0, -3, -6, -9, -12,$

с „коэффициентом пропорциональности“ $\mu = -3$, в соответствии с равенствами

$$\begin{aligned} (-3)(-5) &= +15, (-3)(-4) = +12, \dots, \\ (-3)(+5) &= -15 \dots \end{aligned}$$

Ввиду чрезвычайной распространенности и большой роли линейных зависимостей

$$y = a + bx$$

между величинами, для которых, между значениями самих величин (при $a = 0$) или во всяком случае, между значениями соответствующих приращений $y - y_0$ и $x - x_0$, связанных соотношением

$$y - y_0 = b(x - x_0)$$

имеет место охарактеризованная нами здесь «полная» (включая знак) пропорциональность — правило знаков при умножении приобретает чрезвычайно важное значение, тесно связанное с разъясненным выше конкретным операторным смыслом действия умножения. В этом и следует искать ответа на вопрос о мотивировке формального определения умножения отрицательных чисел с точки зрения часто встречающихся приложений и связанного с ними, привычного нам, конкретного смысла числовых соотношений. Можно думать, что если бы зависимости указанного типа встречались на практике редко, то и поводы для при-

менения правила знаков, как «удобного для внутренних целей алгебры формального правила» в самой алгебре возникали бы лишь в виде исключения, случайно.

Можно сказать, что и самый путь введения отрицательных чисел для характеристики значений направленных величин идет в направлении, обратном тому, которому мы следовали в нашем изложении — от операторов к приращениям и затем к значениям величины. Так, располагая положительными и отрицательными операторами, мы с их помощью прежде всего характеризуем процесс получения направленных отрезков двух противоположных направлений из одного из них, выбранного в качестве единицы меры (характеризуемого числом $+1$); располагая этими характеристиками направленных отрезков, мы затем, выбрав произвольное начало отсчета (характеризуемое числом 0), описываем с их помощью процесс перехода из этого начала в любую точку прямой, получая, таким образом, числовые характеристики (координаты) точек в виде положительных и отрицательных чисел (и нуля), определяющих расположение точек прямой относительно выбранного начала и при заданной единице меры.

Как в отношении операций сложения и вычитания, так и здесь от такта преподавателя зависит, в какой форме и когда провести анализ устанавливаемого определения умножения отрицательных чисел в применении к конкретным задачам. Нам думается, все же, что обычно приводимые примеры в силу своей громоздкости вряд ли достигают нужных целей в тот момент, когда учащиеся только что знакомятся с действиями над отрицательными числами. Более общее, но вместе с тем достаточно конкретное операторное истолкование умножения при умелом его проведении хотя бы даже на одной только схеме направленных отрезков представляется нам имеющим больше шансов на успех.

Такое проведение должно, как нам кажется, следовать в общих чертах тому изложению вопроса, которое мы дали в начале этого параграфа. Затраченное на это время с лихвой окупится, так как истолкование отношения $\frac{b}{a}$ двух отрезков или двух чисел b и a , как характеристики операции, которую надо совершить над a , чтобы получить b , и само по себе чрезвычайно полезно. Постановка множителя на первое место оправдывается при этом еще и общепринятой в алгебре записью коэффициента на первом месте. Для приложений существенно также обратить внимание учащихся на подробно разобранный выше обобщение понятия пропорциональности на такие величины, для которых не только увеличение или уменьшение значения одной из

них отвечает увеличению или уменьшению значения другой во столько же раз, но и изменению направления одной отвечает изменение направления другой.

Несколько искусственным путем можно, руководствуясь и здесь идеей оператора, приспособиться и к классической схеме «долг—имущество».

Не придавая серьезного значения излагаемой ниже иллюстрации, мы все же приведем ее здесь, так как она, при благоприятных условиях и соответствующем оформлении, может дать повод для практики в обращении с отрицательными числами в процессе безобидной и довольно забавной игры.

Вообразим игру в лото с такими правилами. У «держателя лото» и играющих есть «фишки» с написанными на них положительными и отрицательными числами. Владение фишкой с положительной надписью дает право на соответствующий «выигрыш», владение фишкой с отрицательной надписью, обязывает к «уплате» соответственной суммы (скажем, положительными фишками). Аналогичные фишкам «карты» находятся у держателя лото в ящике, из которого он вынимает несколько штук вслепую и раскладывает надписями вниз. Играющие имеют право поставить на любые карты (надписи на которых остаются им неизвестными) в качестве «ставки» любые из своих фишек (в том числе и отрицательные), после чего карты переворачиваются лицевой стороной вверх. Если на карте написано положительное число, например, $+2$, то играющий получает от держателя соответствующую удвоенную ставку, если написано отрицательное, например, -3 , то играющий получает утроенную ставку фишками противоположного знака или — что то же — обязан уплатить держателю утроенную свою ставку. Затем процесс повторяется и т. д. Таким образом можно выиграть и проиграть свой выигрыш, «выиграть» и «проиграть» свой проигрыш. В конце подводится итог «имущества» и «долга» каждого и выясняется, кто сколько выиграл или проиграл. Эта игра требует производства не только сложения чисел различных знаков, истолковываемых, как долг и имущество, но, по сути дела, и перемножения чисел одинаковых и разных знаков — карты здесь играют роль операторов.

Нижеследующий пример мы заимствуем из одного распространенного учебника XIX в. Представим себе дровяной склад (двор), в котором находятся дрова и мусор (подлежащий вывозу). Воз дров представляет собою имущество: пусть стоимость его a рублей. Воз мусора представляет собой потенциальный убыток: за вывозку его надо платить, скажем, b рублей. Характеристику имущественного состояния склада при наличии в нем p возов дров и q возов мусора можно представить в виде $pa + q(-b)$, обозначая стоимость воза мусора отрицательным числом $-b$.

Теперь решим задачу: привезли x возов [при отрицательном x это означает — увезли $|x|$ возов], стоимостью

у рублей каждый. Как изменится имущественное состояние склада?

Ответ x . y обнимает все возможные случаи.

1) Если $x = +n$, $y = +a$, то привезли n возов дров и склад „богаче“ на na рублей.

2) Если $x = -n$ и $y = +a$, то увезли n возов дров $xu = (-n)(+a) = -na$ и склад „беднее“ на na рублей.

3) Если $x = +n$ и $y = -b$, то привезли n возов мусора $xu = (+n)(-b) = -nb$ и для склада это „убыток“ в nb рублей, так как столько придется заплатить за обратный вывоз мусора.

4) Если $x = -n$ и $y = -b$, то увезли n возов мусора, $xu = (-n)(-b) = +nb$: это „прибыль“ в nb рублей, так как столько надо было бы еще заплатить за вывоз n возов мусора, если бы его не увезли.

Соответственно с этим, склад без убытка для себя может согласиться в первом и четвертом случае заплатить $|xu|$ рублей, а во втором и третьем — вправе потребовать уплаты в пользу склада $|xu|$ рублей.

Можно, конечно, найти и другие способы оформления описанной ситуации.

Так, например, комбинируя схему „привоза и увоза со склада“ (стр. 45) со схемой весов с гирьками и шариками (стр. 36) мы можем получить такую иллюстрацию правила знаков. Пусть имеются гирьки весом $+a$ г и шарики „отрицательного веса“ $-b$ г. Операции прибавления на чашку весов n гирек или n шариков обозначим знаком $+n$, операцию снятия с чашки весов n гирек или n шариков знаком $-n$, употребляя способ выражения „положить на чашку весов $-n$ гирек или шариков“.

Тогда задача: „На чашку весов положено x предметов, весом в u г каждый, каково изменение нагрузки?“ во всех случаях решается путем умножения x на y . Так при $x = -n$, $y = -b$ произведение $xu = (-n)(-b) = +nb$ отвечает увеличению нагрузки чашки (стрелка поднимается вверх на nb делений), происходящему от снятия n шариков отрицательного веса $-b$.

§ 8. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦИФРЫ

В качестве еще одной иллюстрации—в преподавании в порядке математического развлечения—может служить применение отрицательных цифр в обозначении чисел. В алгебре это делают обычно лишь при преобразовании мантисс десятичных логарифмов, при котором вместо, например, $-1,2841$ пишут $2,7159$, дополнив первые

цифры мантиссы до 9, а последнюю до 10. Но это преобразование применимо, конечно, и к любым целым числам. Так, вместо последовательности действий

$$3251 - 1281 + 2429 - 2561 - 1135$$

можно произвести сложение

$$3251 + \bar{2}719 + 2429 + \bar{3}439 + \bar{2}865.$$

Далее можно, вводя отрицательные цифры, ограничить таблицу умножения пределами до 5×5 , присоединяя правило знаков. Так

$$\begin{array}{r} 7 \times 9 = 1\bar{3} \\ \times 1\bar{1} \\ \hline \bar{1}3 \\ 1\bar{3} \\ \hline 14\bar{3} = 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \times 8 = 2\bar{1} \\ \times 1\bar{2} \\ \hline \bar{4}2 \\ 2\bar{1} \\ \hline 25\bar{2} = 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 497 \times 398 = 50\bar{3} \\ \times 40\bar{2} \\ \hline 1006 \\ 201\bar{2} \\ \hline 202\bar{2}06 = 197806 \end{array}$$

При устном счете этот прием применяется, но обычно лишь для одного множителя: $8 \times 19 = 8 \times 2\bar{1} = 160 - 8 = 152$.

При вычислениях на арифмометре такая замена множителя сокращает число оборотов ручки: вместо того чтобы умножать на 2896, умножают на $3\bar{1}04$.

При делении целых чисел приходится последовательные кратные делителя вычитать из делимого. Эти действия можно заменить прибавлением кратных, изменив знак у делимого и, следовательно, у всех остатков. Определение цифры частного сводится к нахождению каждого раз наибольшего кратного, прибавление которого оставляет остаток отрицательным, т. е. при записи с одной первой отрицательной цифрой $\bar{1}$ не дает переноса, уничтожающего эту отрицательную единицу. Приведем пример:

$$\begin{array}{r} 32745 : 28 = \bar{1}67255 \mid 28 \\ \underline{28} \\ 1952 \\ \underline{28} \\ 19805 \\ \underline{168} \\ 199735 \\ \underline{252} \\ 199987; \text{остаток } 13. \end{array}$$

На счетах и арифмометре подбор кратных заменяется последовательными прибавлениями; число прибавлений в каждом разряде на арифмометре сосчитывается автоматически, а на счетах откладывается отдельно.

Можно поступить и наоборот—преобразовать кратные делителя и прибавлять их, заботясь о том, чтобы все остатки были положительными. Таким путем можно свести деление к последовательному прибавлению записанного с отрицательной первой цифрой делителя

в различных разрядах. Приведем пример $382500 : 112 \approx 382500 : 1888$. Повторного подписывания делителя $\overline{1}888$ при его последовательных прибавлениях можно избежать, выписав его на бумажку, подводимую к очередному остатку сверху. Ниже записаны последовательные результаты прибавления (столбцы отвечают действиям в последовательных разрядах, числа в скобках указывают число прибавлений, т. е. цифры частного)

382500	46500	1700	580	
270500	35300	580	468	
158500	24100		356	
46500	12900	(1)	244	Частное: 3415
	1700		132	
(3)			20	Остаток 20
	(4)			

(5)

Если эти действия проделать, отбросив отрицательную единицу в делителе, т. е. прибавлять просто 888, то ясно, что в старших разрядах начнут накапливаться единицы в числе, отвечающем числу прибавлений. В результате мы получим в старших разрядах цифровое изображение частного, и рядом—цифровое изображение остатка. Результаты последовательных прибавлений будут:

382500	3046500	3401700	3410580
1270500	3135300	3410580	3411468
2158500	3224100		3412356
3046500	3312900		3413244
	3401700		3414132
			3415020

К сожалению, этот любопытный прием „превращения делимого в частное и остаток“ путем последовательных прибавлений десятичного дополнения делителя практически неудобен, так как, вследствие возможного наложения в одном разряде накапливающихся единиц цифр частного и убывающих единиц цифр остатка, трудно без подсчета числа сложений уловить момент, когда надо перейти к следующему разряду. Однако небольшое видоизменение этого приема устраняет этот недостаток и в нижеследующей форме этот способ не лишен практического значения при вычислениях на арифмометре (где нельзя прибавлять отрицательные единицы одновременно с положительными), а также и на счетах, где последовательные прибавления производятся механически и—в особенности на китайских пятиричных счетах—сравнительно быстро. Именно, если бы мы на счетах одновременно с каждым прибавлением дополнения делителя (включая и отрицательную единицу) в ближайшем старшем разряде откладывали бы одну единицу—для счета числа сложений, то такая операция была бы равносильна прибавлению числа 9888, при откладывании „считающих единиц“ еще в большем удалении от остатка—прибавлению числа 99888 и т. д. При таких операциях появляющиеся цифры частного оказываются отделенными от остатка одним или несколькими нулями и при прибавлении в данном разряде надо только заботиться о том, чтобы эти нули—из-за малой величины остатка—не превра-

тились в девятки. Записи последовательных результатов при вышеуказанном делении и прибавлении числа 9888 будут иметь вид:

382 500	30 046 500	34 001 700	34100 580
10 270 500	3 035 300	34 100 580	34110 468
20 158 500	32 024 100		34120 356
30 046 500	33 012 900		34130 244
	34 001 700		34140 132
			34150 020

Впрочем, в этом примере цифры частного и остатка и без того не набегают друг на друга.

При обычном производстве действия деления можно, употребляя отрицательные цифры в частном, не бояться взять в каком-либо из разрядов частного цифру, на единицу большую требуемой, образовав при этом отрицательный остаток и считая следующую цифру частного (или даже несколько цифр подряд) — отрицательной. Для получения положительного остатка надо деление отрицательных производить, определяя отрицательную цифру частного с избытком абсолютной величины. Например:

$$\begin{array}{r}
 50734 : 17 \\
 \hline
 51 \quad \overline{3024} = 2984 \\
 \underline{-266} \\
 34 \\
 \underline{-74} \\
 68 \\
 \underline{-6} \\
 6
 \end{array}
 \quad \text{или} \quad
 \begin{array}{r}
 50734 : 17 \\
 \hline
 51 \quad \overline{3016} = 2984 \\
 \underline{-266} \\
 17 \\
 \underline{-96} \\
 102 \\
 \underline{-6} \\
 6
 \end{array}$$

Рассмотрение отрицательных остатков при делении целых чисел может облегчить установление и применение признаков делимости, а также нахождение общего наибольшего делителя чисел с помощью алгоритма последовательного деления. Так, замечая, что 10 дает при делении на 11 остаток -1 , заключаем, что остатки от деления степеней 10 на 11 будут $-1, (-1)^2 = +1, -1, +1, \dots$ и т. д., так что, например, 327489 даст остаток $9 - 8 + 4 - 7 + 2 - 3 = -3$ или 8. Рассмотрение остатков от деления на 11 с успехом можно применить наряду с проверкой остатками от деления на 9 для контроля вычислений.

Исходя из равенств $a = nq + r$ и $b = mq + s$ легко доказать совершенно элементарным путем, что остаток от деления на число q суммы, разности и произведения чисел a и b равен остатку от деления на q соответственно суммы, разности и произведения остатков r и s чисел a и b . Это предложение верно и в случае, когда для r и s допускаются отрицательные значения. Таким путем мы можем получить не лишнее и практического значения истолкование действий над отрицательными числами на простейшем числовом материале. Так, имея в виду остатки от деления на 9, мы можем равенствам

$$\begin{aligned}
 (-3) + (-2) &= -5; & (-3) + (+2) &= -1 \\
 (-3) - (-5) &= +2; & (-3) - (-2) &= -1
 \end{aligned}$$

и т. п. дать такое истолкование: сумма чисел, дающих каждое остаток -3 и -2 , дает остаток -5 , произведение этих чисел даст остаток $+6$

и т. д. Все эти соотношения допускают непосредственный контроль с помощью замены отрицательных остатков положительными. Так, заменяя -3 положительным остатком $9-3=6$ и, аналогично, -2 положительным остатком $9-2=7$ вместо последнего равенства мы могли бы написать $6 \cdot 7=42$ и заметить, что 42 дает как раз остаток 6 при делении на 9. Приведем пример применения этого приема при контроле вычислений с помощью девятки; контроль результата умножения

$$47859 \times 75437 = 3610339383$$

остаток первого числа: в сумме цифр $4+5=9$ и цифру 9 отбрасываем; остается 7 и 8, т. е. в отрицательных остатках $(-2)+(-1)=-3$, остаток второго числа $(-2)+(+1)=-1$ ($5+4=9$ отбрасываем; $3+7=10$ даст остаток 1). Остаток произведения должен быть равен $(-3)(-1)=+3$. Действительно, группируя цифры, дающие в сумме 9, а именно $3+6=9$, $3+3+3=9$, $1+8=9$, находим остаток 3.

Все эти вычисления, конечно, производятся в уме, и написанные равенства имеют целью только пояснение того, как можно при этом использовать действия над отрицательными остатками.

§ 9. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Три стороны вопроса — установление формальных определений, внутри-алгебраическая мотивировка их и выяснение конкретного смысла отрицательных чисел и действий над ними в применении к изучению различного рода величин, как мы видели выше, тесно связаны друг с другом и отчетливое представление о роли отрицательных чисел в алгебре получается только в результате соответствующего всестороннего анализа. Конечно, такой анализ не может сам по себе найти место в преподавании, — однако, ориентировка в методической стороне дела дает возможность преподавателю сознательно подойти к соответствующим методическим проблемам. Решение этих проблем, конечно, не предопределяется указанным анализом однозначно.

Тем не менее, резюмируя вкратце сказанное выше, подчеркнем, что мы считаем целесообразным в преподавании строить изложение в порядке, в известной мере обратном тому, по которому протекал наш анализ — именно отходя от конкретных схем и в прямой связи с ними устанавливая соответствующие определения и правила действий. Конкретный опыт и наглядное восприятие должны, по нашему мнению, предшествовать установлению формальных определений, для последующей иллюстрации и закрепления которых материала достаточно. Для этой цели — первоначального ознакомления с отрицатель-

ными числами—мы отдаем—как было сказано выше, схемам весов с шариками и общей схеме положительных и отрицательных приращений предпочтение перед обычной геометрической интерпретацией (направленные отрезки), считая вместе с тем необходимым приучать учащихся к различным по своему качественному, а отчасти и формальному, содержанию (характеристики «переходов» и «состояний») применениям отрицательных чисел.

В заключение мы остановимся на вопросах, связанных с дальнейшим применением отрицательных чисел в курсе алгебры, попутно приводя и некоторые исторические данные.

§ 10. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ КОРНИ УРАВНЕНИЙ

В сочинении Мухамеда Ибн Муса из Хорезма (Аль-куаризми, IX в. н. э.) под названием «Альджебр Уальмукабала» прибавление к обеим частям равенства поровну для уничтожения («перенесения в другую часть с обратным знаком») отрицательного члена в одной из частей равенства обозначалось, если следовать традиционному объяснению историков математики, словом «альджебр»—восстановление (*restitutio*), а отнимание поровну от обеих частей равенства—словом «уальмукабала»—противоположение (*oppositio*).

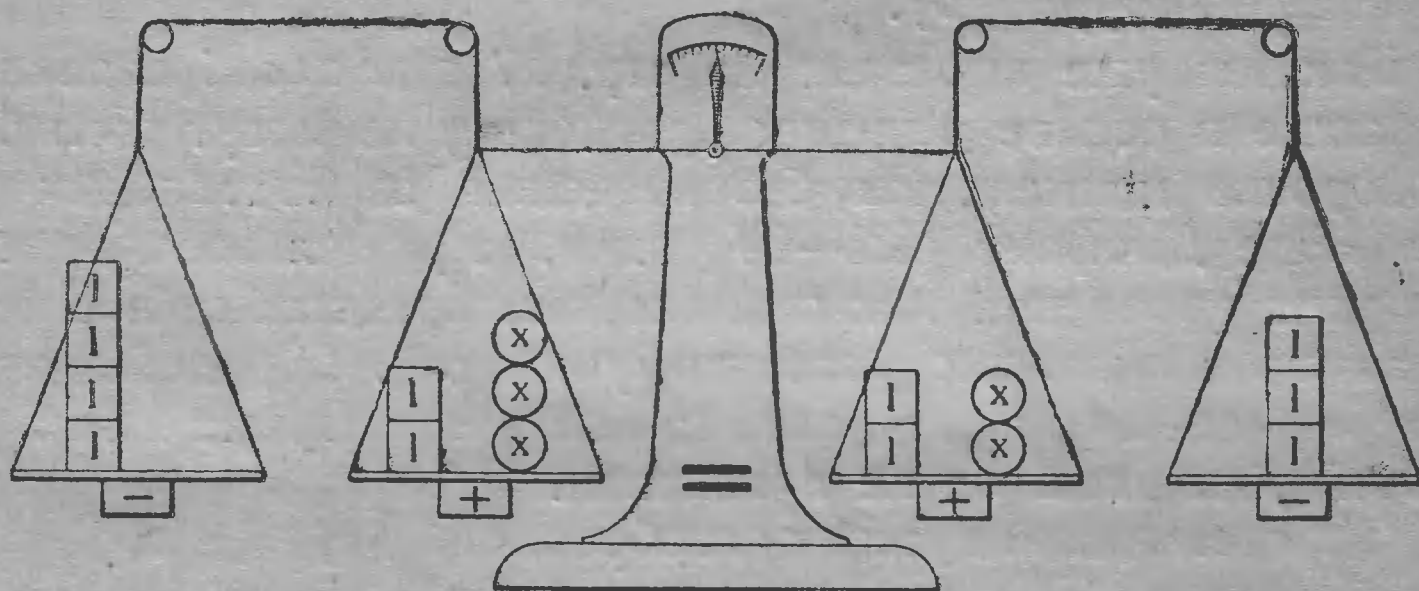
Как мы уже показали на стр. 27 эти преобразования, лежащие в основе решения уравнений, не могут быть безоговорочно применяемы без введения отрицательных чисел. Уже Диофант (III—IV в. н. э.) пользовался при решении уравнений как техническим средством (в мысли, довольно близком к указанному на стр. 26) действиями над отрицательными числами; все же отрицательных решений уравнений он не признавал.

Определения индусских алгебраистов (*Âryabhata*, VI в., *Brahmagupta*, VIII в., *Bhâskara*, XII в.) почти ничем не отличаются от современных. Обозначая отрицательные коэффициенты не знаком вычитания, а точкой, поставленной над абсолютной величиной коэффициента уравнения, индусы рассматривали отрицательные числа и изолированно, применяя их к решению арифметических и астрономических задач (долг, имущество, прибыль, убыток, расстояния, откладываемые в одну и другую сторону, моменты времени до и после данного и т. п.)

Индусские правила, которым сейчас уже свыше тысячи лет заслуживают того, чтобы привести их в переводе. Слова «имущество» и «долг» в индусском изложении являются терминами равносильными нашим «положительное и отрицательное количество».

«Сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, имущества и долга — их разность или, если они равны — нуль. Сумма нуля и долга — тот же долг, имущества и нуля — то же имущество, двух нулей — нуль. Правила вычитания: меньшее вычитается из большего, имущество из имущества, долг из долга; но если вычитается больше из меньшего, значение избытка меняется. Долг, будучи вычтен из нуля, делается имуществом, имущество превращается в долг. Долг без нуля остается тем же долгом, имущество — тем же имуществом. Чтобы вычесть имущество из долга или долг из имущества, надо составить их сумму. Произведение двух имуществ или двух неимуществ есть имущество; результат произведения имущества на долг представляет убыток. То же правило имеет место и при делении. Квадрат имущества или долга есть имущество; имущество имеет два корня: один составляет прибыль, другой — долг. Корень убытка не существует, ибо таковой не есть квадрат» (цитируем по И. Тимченко, «Основания теории аналитических функций»).

Операциям восстановления и противоположения можно дать наглядное истолкование, несколько обобщая схему весов с гирьками и шариками стр. 35. Именно, вообразим себе «алгебраические весы» следующей конструкции (для классной демонстрации достаточен макет или даже схематический чертеж на доске):



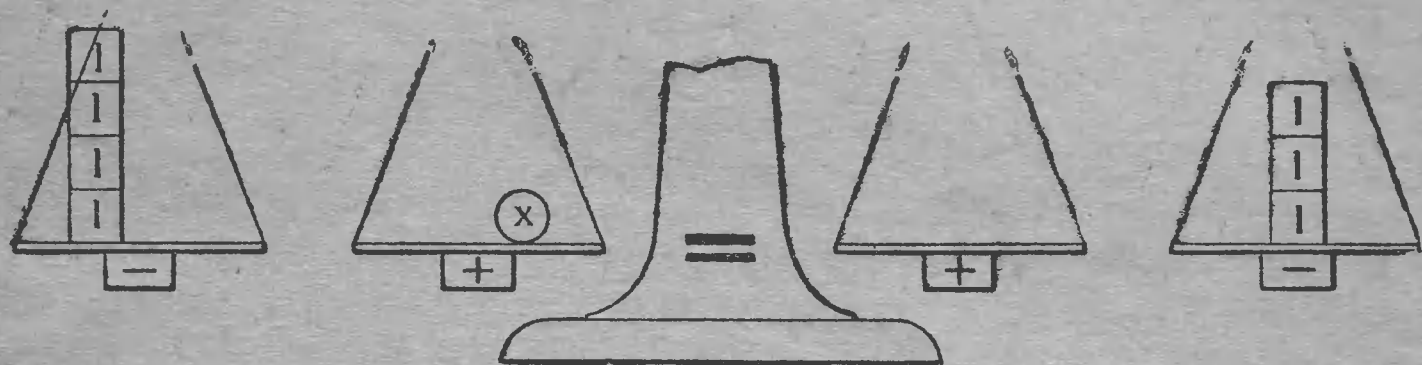
Черт. 3.

Здесь на весах поставлено уравнение

$$2 + 3x - 4 = 2 + 2x - 3.$$

«Противоположение» дает, по снятии двух гирек единичного веса и двух неизвестных нагрузок x , следующее распределение нагрузок (черт. 4):

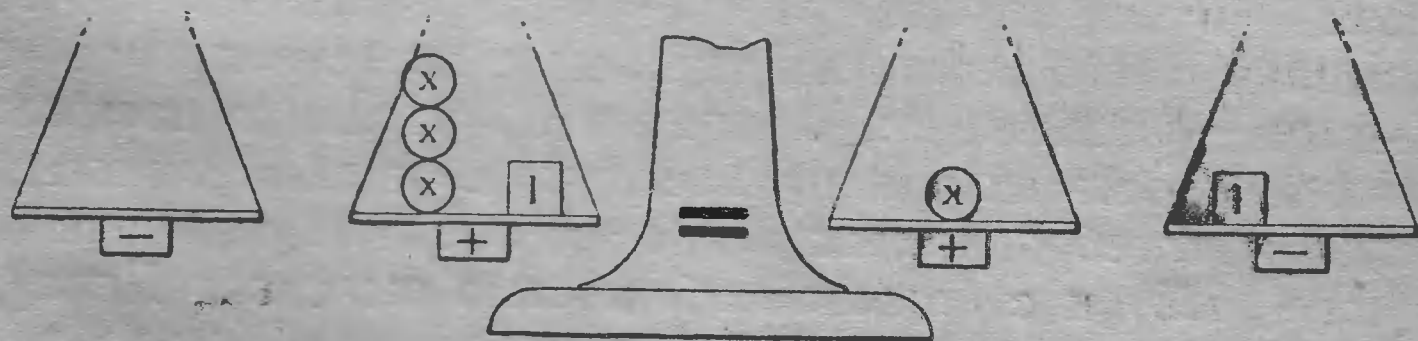
«Восстановление» — перенесение четырех гирек с «отрицательной» чашки слева на «положительную» справа — дает, после снятия с обеих чашек справа взаимно уравнивающих трех гирек, равновесие x и 1. Отметим, что



Черт. 4

во втором из изображенных положений обе части равенства имеют отрицательное значение (ср. стр. 28) — на «отрицательных» чашках лежит бóльший груз, чем на положительных; тем не менее ясно, что равновесие при $x = 1$ должно иметь место.

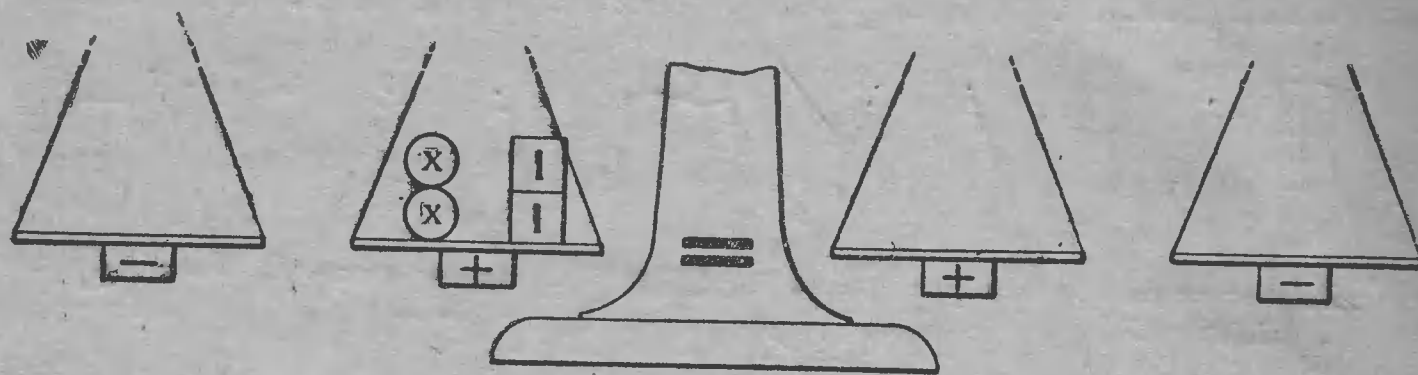
Эти весы, кроме чрезвычайно наглядной иллюстрации действий «восстановления» и «противоположения», т. е. основных преобразований уравнений первой степени в процессе их решения можно применять и в тех случаях, когда уравнение имеет отрицательный корень, допуская истолкование искомой нагрузки x не как гирьки, а как шарика, в соответствии со схемой стр. 35. Известную нагрузку, если не иметь в виду буквенных уравнений, всегда можно изображать с помощью гирек — знаку числа отвечает помещение нагрузки на соответствующую чашку; что же касается величины x , то заранее неизвестно, как ее придется толковать, как гирьку или как шарик. Приведем пример. Уравнение $3x + 1 = x - 1$ изобразится схе-



Черт. 5

мой, которая преобразуется в изображенную на черт. 6, откуда ясно, что x отвечает тяге вверх в 1 ед. (шарику -1), т. е. $x = -1$.

Часто применяемая операция перемены знака у обеих частей уравнения равносильна обмену нагрузок положительных и отрицательных чашек.



Черт. 6

Всобще преобразования уравнения как нельзя более непосредственно иллюстрируются этой схемой и операция «альджебр» выступает как фактическое перенесение нагрузок из одной части равенства в другую, но на противоположную по знаку чашку весов.

Несмотря на широкое использование отрицательных чисел в конкретных задачах и при преобразованиях уравнений индусские и арабские математики все же в большинстве случаев с недоверием относились к отрицательным корням уравнений: «в определенном отрицательном числе есть нечто противное общепринятым воззрениям» (Bhâskara).

В средневековой европейской математике соединение отрицательных чисел в качестве равноправных с положительными в одну систему рациональных чисел было достигнуто лишь очень поздно, так как первоначально с ними оперировали очень формально и конкретный смысл их был неясен. Числа, меньшие, чем «ничто», дающие при перемножении вновь нечто положительное, представлялись нереальными, фиктивными, ложными (как их и называли). Равноправность их с положительными числами в геометрических и алгебраических вопросах впервые отмечена Жираром (1629) и с большой общностью выяснена Декартом (1637), выдержку из сочинения которого «Géometrie» мы здесь приведем.

«О ложных корнях» (алгебраических уравнений.—И. А.)
«Но часто случается, что некоторые из корней ложны или меньше, чем ничто; предположив, что x сз-

начает недостаток (le défaut) величины, равной 5, получим уравнение $x + 5 = 0$, умножая которое на

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

найдем уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

в котором четыре корня: три действительных 2, 3 и 4 и один ложный 5».

«Можно, не зная величины корней данного уравнения, увеличить или уменьшить их на какую-нибудь данную величину, для чего нужно только всюду в уравнении заменить неизвестный член другим, большим или меньшим, чем этот последний на данную величину».

«Нужно заметить, что увеличивая действительные корни уравнения, мы уменьшаем на ту же величину ложные корни (т. е. их абсолютную величину.—И. А.) и наоборот, уменьшение тех и других (т. е. их абсолютных величин.—И. А.) на равную им величину обращает их в нуль, если же уменьшение это превосходит их величину, то они обращаются из действительных в ложные и из ложных в действительные».

Поясним на примере, что здесь имеется в виду.

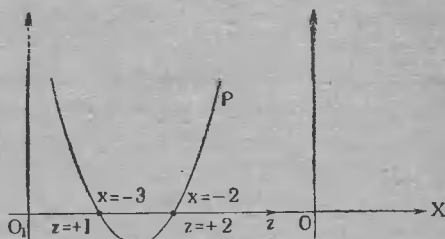
Если в уравнении $x^2 - 5x + 6 = 0$, имеющем отрицательные корни $x_1 = -2$ и $x_2 = -3$ вместо неизвестного x ввести неизвестное $z = x + b$, большее чем x на величину b , т. е. положить $x = z - b$, то в новом уравнении $(z - b)^2 + 5(z - b) + 6 = z^2 - (2b + 5)z + b^2 - 5b + 6 = 0$ корни будут

$$z_1 = -2 + b \text{ и } z_2 = -3 + b.$$

Если b взять достаточно большим, например, $b > 4$, то „ложные“ корни $x_1 = -2$ и $x_2 = -3$ превратятся в „действительные“.

Декарт непосредственно связывал это с геометрическими исследованиями и подчеркивал, что такого рода преобразования уравнений не влияют на их геометрическое значение, не изменяют природы кривой линии, выражаемой данным уравнением. Положительные и отрицательные корни, переходя друг в друга при простом преобразовании координат, равноправны, как характеристики определенных точек кривой или решения иной определенной геометрической задачи.

В нашем примере как „ложные“ корни x_1 и x_2 , так и „действительные“ z_1 и z_2 определяют положение одних и тех же точек M_1 и M_2 пересечения параболы P с осью OX , но только по отношению к разным началам отсчета O и O_1 на оси абсцисс.



Черт. 7

В курсе элементарной алгебры часто приходится встречаться с вопросом об истолковании отрицательных решений уравнений, выражающих условия конкретных задач. При этом могут представиться различные случаи.

1) Если величина, о которой идет речь, является в условиях данной задачи существенно положительной, не допускающей истолкования отрицательных значений, то отрицательные решения приходится отбросить, а если они являются единственными — сделать заключение о невозможности удовлетворить условиям задачи, т. е. об отсутствии решений.

2) Если же величина, о которой идет речь, допускает отрицательные значения (отвечающие, например, уменьшению величины вместо предполагаемого увеличения или противоположному принятому при составлении уравнения направлению отрезка, или противоположному направлению вращения, предшествующим, а не последующим моментам времени, убытку вместо прибыли и т. д.), то отрицательные решения могут быть истолкованы либо непосредственно, как ответ на вопрос задачи, либо как ответ на аналогичный вопрос, поставленный в соответственной обобщенной или измененной форме.

Осмысленность и реальное значение такого истолкования устанавливаются, конечно, в зависимости от содержания самой задачи. Эта оговорка, впрочем, не является

специфической для отрицательных решений — иногда и положительное (даже целое) число, получающееся в качестве решения, может свидетельствовать о невозможности задачи и не поддается истолкованию.

Часто при этом речь идет просто о некоторых неравенствах, налагаемых конкретным смыслом условия на величину искомых значений неизвестных. При соответственном выборе начала отсчета эти неравенства могут как раз и сводиться к требованию, чтобы решения выражались положительными числами, но при перемене начала отсчета (вспомним Декарта) и положительные решения могут противоречить смыслу вопроса. Приведем примеры.

1. Требуется смешать два раствора крепости 5% и 8% так, чтобы получить 6 литров раствора 10% крепости. Сколько литров каждого раствора потребуется для этой цели?

Уравнения задачи $5x + 8y = 6 \cdot 10$; $x + y = 6$ дают $x = -4$; $y = 10$.

Отрицательное значение для x свидетельствует о невозможности удовлетворить условиям задачи — обстоятельство непосредственно очевидное. Но и положительное значение для y свидетельствует о том же, поскольку $10 > 6$.

Толкование, согласно которому из 10 литров 8% раствора следовало бы «извлечь» 4 л 5% раствора здесь явно не отвечает постановке вопроса.

2. Для заправки и поездки к месту работы каждый трактор расходует 2 л горючего и за каждый час работы 1 л. Утром вышло 18 тракторов, начавших работу на поле в полдень и израсходовавшие к моменту конца работы на поле все вместе 27 л. В котором часу они кончили работу на поле?

Уравнение $(2 + x) 18 = 27$ дает $x = -\frac{1}{2}$.

Так как отсчет времени возможен в двух направлениях, то можно было бы предположить, что значение $x = -\frac{1}{2}$ приводит к ответу: в $11\frac{1}{2}$ час. утра. Но в данном случае такое истолкование лишено смысла и отрицательный ответ свидетельствует о противоречивости условий задачи, что и само по себе очевидно: 27-ми л не хватает даже на то, чтобы добраться до места работы. То обстоятельство, что решение — отрицательное, не является специфическим. Поставив вопрос иначе и ведя счет часов

с полуночи, мы получили бы уравнение $(2 + z - 12) 18 = 27$ и положительный корень $z = 11\frac{1}{2}$ также свидетельствовал бы о невозможности решения задачи ввиду того, что $11\frac{1}{2} < 12$.

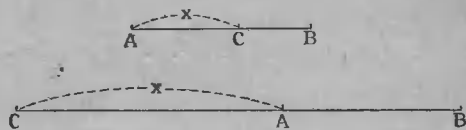
3. Отцу 40 лет, сыну 13. Через сколько лет отец будет вчетверо старше сына?

Уравнение $40 + x = 4(13 + x)$ дает $x = -4$.

Здесь истолкование очевидно: если понимать вопрос задачи „через сколько лет“ в буквальном смысле слова, то задача не имеет решения — требуемый момент никогда не наступит. Если же понимать вопрос в более общем смысле слова („в какой момент времени“), то ответ $x = -4$ имеет смысл: требуемое соотношение имело место за 4 года до рассматриваемого момента.

Поставив вопрос: „в какой момент сын старше отца в $5\frac{1}{2}$ раз“, мы получим решение $x = -46$, приводящее к лишенным смысла отрицательным значениям „возраста“ отца и сына. И здесь перенесением начала можно превратить „ложные“ корни в „действительные“.

4. Найти на прямой AB точку C так, чтобы отрезок AC был средней пропорциональной между AB и CB .



Черт. 8 и 9

Обозначая отрезок AC через x , AB через a , придем к уравнению

$$x^2 = a(a - x) \quad (1),$$

откуда $x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$; $x_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

Отрицательное решение отвечает точке C , лежащей вне отрезка AB и удовлетворяющей условию задачи.

Подчеркнем, что в уравнении x^2 означает квадрат длины $|x|$ отрезка x , и выражения a и $a - x$ означают длины отрезков, т. е. положительные числа. Но это не мешает тому, чтобы x истолковать, как взятую с тем или иным знаком абсциссу точки C относительно начала

А, так как при всех положениях точки C на отрезке AB или вне его, слева от A , длина отрезка AC будет выражена разностью $a - x$.

Но было бы неправильно применять формулу $x^2 = ab$ для случая, когда a и b означают координаты двух точек A и B и строить, например, „отрезок“, для которого $x^2 = (+1)(-1)$, т. е. $x \cong \sqrt{-1}$ как среднюю пропорциональную между „отрезком“ $(+1)$ и (-1) с помощью обычного построения высоты прямоугольного треугольника, как это иногда делают для того, чтобы придти к известному геометрическому истолкованию мнимой единицы i . В формуле $x^2 = ab$ все величины означают длины отрезков, взятые без всяких знаков, и поэтому только что описанному построению отвечали бы значения $x = 1$, $a = 1$, $b = 1$.

5. Попарно соединяя n точек плоскости, получили 21 линию. При каком n ?

Квадратное уравнение $n^2 - n - 42 = 0$ имеет корни $n_1 = 7$ и $n_2 = -6$. Отрицательное решение в этом случае приходится просто отбросить.

6. Коэффициент при x^3 в разложении $(1+x)^n$ по степеням x равен 21. При каком n ?

Здесь, если иметь в виду только обычные элементарные разложения по формуле бинома Ньютона, единственным решением будет $n = 7$. Но и второй корень уравнения $n = -6$ имеет смысл, отвечая разложению $(1+x)^{-6} = \frac{1}{(1+x)^6}$ по возрастающим степеням x , которое можно получить и элементарным путем, деля 1 на $(1+x)^6$ по правилу деления многочленов, расположенных по возрастающим степеням буквы x .

§ 11. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Повидимому, впервые отрицательные показатели были применены в XV в. Николаем Шюке (Chuquet, *Triparty en la science des nombres*, 1484); у Штифеля (середина XVI столетия) уже в явной форме встречается соотношение $a^0 = 1$; с начала XVII в. (в связи с учением о логарифмах) отрицательные (и дробные) показатели приобретают уже полные права гражданства в математике.

В преподавании здесь часто наблюдается то же явление, что и при введении отрицательных чисел: формаль-

ные определения не удовлетворяют учащихся и они рассматривают как доказательство преподносимые им мотивировки определений.

Формальная сторона дела сводится к следующему.

Определение 1. При всяком $a \neq 0$, по определению,

$$a^0 = 1.$$

Определение 2. При всяком $a \neq 0$ и при $n > 0$, по определению,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Затем следуют теоремы: при перемножении степеней с одинаковым основанием, показатели степеней всегда складываются; при делении — из показателя делимого вычитается показатель делителя; при возвышении в степень — показатели перемножаются (в частности, из этих теорем будет следовать, что равенство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ имеет место n при $n \leq 0$).

Мотивировка определений и состоит как раз в том, что введение отрицательных показателей позволяет формулировать эти теоремы в самом общем виде, не оглашая ни величины, ни знаков показателей.

Так, если желать, чтобы вычитание показателей при делении можно было бы производить и при равных показателях, то надо положить

$$1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0;$$

если желать, чтобы вычитание показателей можно было бы производить и тогда, когда данная буква входит в числитель дроби с меньшим показателем степени, чем в знаменателе, то надо положить

$$\frac{1}{a^p} = \frac{a^n}{a^{n+p}} = a^{n-(n+p)} = a^{-p}.$$

Вот эти-то цепочки равенств учащиеся и воспринимают, как выводы, забывая, что правило вычитания показателей до вышеприведенных определений установлено только для случаев, когда результат вычитания — положительное число.

С этим явлением бороться чрезвычайно трудно, так как приведенные цепочки равенств внешне, действительно, чрезвычайно схожи с выводом или доказательством; умолчать же о них тоже нельзя, так как тогда учащиеся никак уже не смогут уловить смысл в новых определениях. Остается только пожелать, чтобы ко времени введения отрицательных показателей математическое развитие учащихся позволило преподавателю с достаточной четкостью провести грань между определением и его мотивировкой.

Наряду с этим не следует упускать из виду и конкретизации вводимых условных соглашений несколько иным путем.

Прежде всего, можно обратить внимание на то, что в ряду чисел

$$a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

переход от одного элемента к другому, соседнему с ним справа, отвечает умножению на a и увеличению показателя степени на 1, переход к элементу, стоящему на 2-м месте справа — умножению на a^2 и увеличению показателя степени на 2 и т. д. Переходы обратного направления к соседнему элементу слева, к элементу, стоящему на 2 места слева, отвечают делению на a , на a^2 и т. д. и уменьшению показателя степени на 1 и на 2. Но этим путем ряд можно продолжить неограниченно влево, дополнив его так;

$$\dots \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \dots$$

И здесь переходы слева направо отвечают умножению на a, a^2, \dots и т. д., переходы справа налево — делению на a, a^2, \dots . Естественно, продолжая производить те же действия над показателями, охарактеризовать число с показателем $1 - 1 = 0$, число $\frac{1}{a}$ — показателем $1 - 2 = -1$ и т. д.

В частности, следует обратить особое внимание на часто встречающуюся в приложениях запись десятичных дробей с помощью отрицательных показателей числа 10. Здесь ряд степеней удобнее писать справа налево:

$$\dots 10^3=1000; 10^2=100; 10^1=10; 10^0=1; 10^{-1}=0,1; \\ 10^{-2}=0,01; \dots$$

Здесь отрицательные значения показателя можно не посредственно связать с характеристикой положения цифры 1 относительно запятой — или, точнее, относительно разряда единиц, причем положительное направление отсчета «координаты цифры» отвечает движению влево в сторону возрастания чисел.

Для сравнения между собой малых чисел, например, 0,00000281 и 0,00000031 удобнее записать первое хотя бы в форме $2,81 \cdot 10^{-6}$, а второе в виде $0,31 \cdot 10^{-6}$. Физические константы обычно пишутся в таком виде, сразу дающем возможность судить о порядке соответствующей величины.

Полезны упражнения типа $2,81 \cdot 10^{-6} = 28,1 \cdot 10^{-7} = 0,281 \cdot 10^{-5} = \dots$, а также и такие

$$0,00000281 \cdot 0,00000031 = 281 \cdot 10^{-8} \cdot 31 \cdot 10^{-8} = \\ = (281 \cdot 31) 10^{-16}$$

$$0,00000281 : 0,00002 = 281 \cdot 10^{-8} : 2 \cdot 10^{-5} = 140,5 \cdot 10^{-3} \text{ и т. п.}$$

К истолкованию отрицательных показателей можно подойти еще и так. Рассмотрим какое-нибудь выражение A , содержащее множитель A в достаточно высокой (для начала степени. Умножение A на a^n можно рассматривать, как присоединение к A еще n сомножителей, равных a , а умножение на $\frac{1}{a^n}$, т. е., деление на a^n , как „погашение“

или „уничтожение“ в A того же числа этих сомножителей. Соответственно с этим при подсчете числа множителей a , входящих в выражение, образованное путем ряда последовательных умножений и делений, например,

$$a^{10} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot a \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^4}$$

дробные множители (отвечающие действию деления) дадут в алгебраической сумме $10 + 2 - 3 + 1 + 2 - 1 - 4$ отрицательные члены, так что $\frac{1}{a^3}$ будет при подсчете представлено в такой сумме числом -3 , $\frac{1}{a^4}$ — числом -4 и т. д.

Естественно, поэтому, согласно с обычной условной фразеологией, применяемой в приложениях при появлении

отрицательных значений величин, сказать, что умножение на $\frac{1}{a^n}$ отвечает „присоединению отрицательного числа $(-n)$ сомножителей, равных a “ или, что в множителе $\frac{1}{a^n}$ сомножитель a „содержится отрицательное число $(-n)$ раз“. Умножение на 1 не присоединяет и не уничтожает множителя a и потому естественно сказать, что в 1 сомножитель a содержится „0 раз“.

Подчеркнем попутно, что в дальнейшем, при изучении действия извлечения корня и показательной функции, необходимо обратить особое внимание на то, что при показателе x , близком к нулю (очень малом), степень a^x очень близка к 1, так что значение $a^0 = 1$ естественным образом включается в совокупность значений непрерывной функции a^x . Так, путем последовательного извлечения квадратного корня, можно установить, что

$$10^{\frac{1}{32}} = 10^{0,03125} \approx 1,07; 10^{\frac{1}{256}} \approx 10^{0,0039} \approx 1,009; 10^{\frac{1}{1024}} \approx 1,00056$$

и т. д. (Для еще меньших показателей x получим приближенно $10^x \approx 1 + 2,30258 x$, где $2,30258 \dots$ есть натуральный логарифм числа 10).

Обе намеченные формы мотивировки по смыслу равносильны обычной, но они уже заметно для учащихся отличаются от доказательства и имеют явно выраженный характер наводящих соображений. Возможно, поэтому, что их применение выявит для учащихся с достаточной ясностью конкретный смысл отрицательных показателей, не затушевывая при этом того, что смысл выражений a^{-n} и a^0 устанавливается с помощью соответствующих определений.

Мы не будем останавливаться на возвышении отрицательных чисел в дробную степень (извлечении корня из отрицательных чисел) и на понятии логарифма отрицательного числа, так как эти вопросы выходят уже за пределы начальной части курса алгебры и принадлежат по существу, к теории аналитических функций (функций комплексного переменного).

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
§ 1. Введение	3
§ 2. Введение отрицательных чисел с формально-логической точки зрения	5
§ 3. Мотивировка определений с помощью принципа перманентности	20
§ 4. Мотивировка определений в практике преподавания	28
§ 5. Конкретный смысл отрицательных чисел	32
§ 6. Положительные и отрицательные числа как характеристики изменений величин	42
§ 7. Конкретное истолкование правила знаков при умножении чисел	50
§ 8. Отрицательные цифры	60
§ 9. Некоторые общие выводы	64
§ 10. Отрицательные корни уравнений	65
§ 11. Отрицательные показатели	73

Отв. редактор проф. В. Л. Гончаров. Техн. редактор В. И. Гарнец

А-08393 Подп. к печ. 20/X 1947 г. Уч.-изд. л. 4,37 Печ. л. 5
Зак. 1596 Тир. 5000

Типография Изд-ва АПН. Москва, Лобковский, 5/16.

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

в 1947 г.

АБАКУМОВ С. И., проф., Методика пунктуации. 116 стр., ц. 3 р.

БОЧАРОВ Г. К., Живое слово преподавателя литературы. 138 стр., ц. 4 р.

ГВОЗДЕВ А. Н., проф., Основы русской орфографии. 69 стр., ц. 2 р.

ГРОМБАХ С. М., Очерки по школьной гигиене. 126 стр., ц. 4 р.

МЕНЧИНСКАЯ Н. А., Очерки психологии обучения арифметике. 104 стр., ц. 3 р.

МОНОСЗОН Э. М., Воспитание сознательной дисциплины в процессе обучения. 200 стр., ц. 6 р. 50 к.

ГУЛЬ И. М., Геометрия Лобачевского. 100 стр., ц. 3 р.

ПЕРЕПЁЛКИН Д. И., Геометрические построения в средней школе. 84 стр., ц. 2 р. 50 коп.

РЕДОЗУБОВ С. П., Обучение грамоте. 128 стр., ц. 3 р.

ЧЕТВЕРУХИН Н. Ф., проф., Стереометрические задачи. 60 стр., ц. 1 р. 50 к.

ШАЛАЕВ В. Ф., Практическая работа учащихся начальной школы на пришкольном участке. 126 стр., ц. 3 р. 50 к.